ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD Y SU APLICACIÓN GEOMÉTRICA, MEDIANTE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

CANDIDATO A MAGISTER

EDISON ROMERO VALLEJO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA RISARALDA

2017

ANÁLISIS DE LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE PROPORCIONALIDAD Y SU APLICACIÓN GEOMÉTRICA, MEDIANTE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA

EDISON ROMERO VALLEJO

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

.

Director

Phd. ELIÉCER ALDANA BERMÚDEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
PEREIRA RISARALDA

2017

DEDICATORIA

A Dios, por la fortaleza que me brinda todos los días.

A mi padre Efraín y a mi hermano Andrés Felipe, por todo el amor y apoyo que me brindan.

A mis perros, Sombra y Dexter por su compañía permanente y a Clinton por todo el afecto que me dio.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a todas las personas que han contribuido de una manera u otra a la realización de este trabajo de investigación.

En primer lugar, al Dr. Eliécer Aldana Bermúdez, mi asesor del trabajo de grado, por su dedicación, paciencia y entusiasmo que le puso en cada asesoría. Estimado profesor, gracias por todo el apoyo brindado, por la motivación y por sus valiosas orientaciones durante el desarrollo de esta investigación.

A todos mis profesores de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, por sus enseñanzas y orientaciones.

A mi padre y hermano, por todas las experiencias que hemos compartido y por cuidar a mis perros.

A mis compañeros de estudio, por todos sus aportes en el desarrollo de la Maestría.

A mis estudiantes, por su valiosa participación y empeño en cada una de las actividades propuestas en clase.

Al rector de mi institución Leonel Leonardo Arcila y al coordinador Julián Callejas, por su comprensión con mis estudios y apoyo con esta investigación.

Al profesor Juan Pablo Gutiérrez, por sus aportes y ayuda en este trabajo.

A todos, mi gratitud y más sincero reconocimiento.

Eliécer Aldana Bermúdez, doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España y profesor de Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Tecnológica de Pereira.

CERTIFÍCA

Que la presente memoria titulada *"*Análisis de la comprensión del concepto de proporcionalidad y su aplicación geométrica, mediante una ingeniería didáctica*"*, ha sido realizada bajo mi dirección por *Edison Romero Vallejo* y constituye su trabajo de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de la Matemática.

Y para que tenga los efectos oportunos ante la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el mes de noviembre de dos mil diecisiete (2017).

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez

Director trabajo de grado

RESUMEN

El presente trabajo es una propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de proporcionalidad y análisis de sus aplicaciones en diferentes contextos. Propiciar la comprensión de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad por medio del diseño y aplicación de secuencias didácticas teniendo como marco de referencia la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau y como proceso metodológico una Ingeniería Didáctica para la creación y experimentación de situaciones a-didácticas, utilizando la resolución de problemas como medio para la construcción del objeto matemático en los estudiantes de postprimaria de la Institución Educativa Rural Hojas Anchas sede Rafael Uribe Uribe del municipio de Circasia Quindío.

Palabras Claves:
Proporcionalidad, aprendizaje, didáctica, razón, proporción, a-didáctica.

ABSTRACT

The following paper is a didactic proposal for the learning process of the proportionality concept and its geometric application in different contexts. Promoting the comprehension of reasoning, proportion, and proportionality concepts through the desing and application of didactic sequencies hawing Brousseau`s theory of didactical situations as a theoritical framework, and hawing a didactical engineering for the creation and experimentation of a-didactical situations as a methodological process, using problema salving as a way to build mathematical object in post-primary students from the Hojas Anchas countryside shool Rafael Uribe Uribe Circasia Quindío.

Keywords:
Proportionality, learning, didactics, reasing, proportion, a-didactic

CONTENIDO

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA **1**

    1.1. Estructuras Multiplicativas 1

    1.2. El Concepto de Proporcionalidad 3

    1.3. Proporcionalidad Geométrica 6

    1.4. Pregunta de Investigación 9

2. OBJETIVO GENERAL 10

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS 11

4. JUSTIFICACIÓN 12

5. ESTADO DEL ARTE 16

    5.1. Aspectos Históricos de Razón, Proporción y Proporcionalidad 16

    5.2. Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros 19

    5.3. Aprendizaje del Concepto de Proporcionalidad 20

    5.4. Proporcionalidad en Textos Escolares 21

    5.5. Proporcionalidad Geométrica 22

6. MARCO TEÓRICO 25

    6.1. Marco Teórico Disciplinar 25

        6.1.1. El razonamiento Multiplicativo 25

        6.1.2. Razón 27

        6.1.3. Propiedades de las Razones 29

        6.1.4. Proporción 30

        6.1.5. Propiedades y Teoremas de las Proporciones 30

        6.1.6. Magnitudes Directamente Proporcionales 35

        6.1.7. Magnitudes Inversamente Proporcionales 36

        6.1.8. Regla de Tres 36

        6.1.9. Proporcionalidad Geométrica 38

6.2. Marco Teórico Situación Didáctica ... 44
6.2.1. Relación: Situación Didáctica / Situación a-didáctica ... 46
6.2.2. El Contrato Didáctico ... 47
6.2.3. Efectos que Acontecen en la Situación Didáctica ... 47
6.2.4. Tipos de Situaciones Didácticas ... 48
7. METODOLOGÍA ... 52
7.1. Fases de la Ingeniería Didáctica ... 53
7.1.1. Fase 1: Análisis Preliminar ... 53
7.1.2. Fase 2: La Concepción y el Análisis a priori ... 54
7.1.3. Fase 3: Experimentación ... 55
7.1.4. Fase 4: Análisis a posteriori y Validación ... 55
8. ANÁLISIS PRELIMINAR ... 58
8.1. Análisis Cognitivo ... 58
8.2. Análisis Didáctico ... 66
8.2.1. La Enseñanza de Razón, Proporción y Proporcionalidad ... 66
8.2.2. Análisis de Restricciones ... 70
8.3. Análisis Epistemológico ... 70
9. CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS APRIORI ... 71
9.1. Determinación de las Variables ... 71
9.1.1. Variables Macrodidácticas ... 71
9.1.2. Variables Microdidácticas ... 72
9.2. Diseño de la Secuencia Didáctica ... 72
9.2.1. Visión General ... 72
9.2.2. Reconocimiento de las Variables en las Actividades ... 73
9.2.3. Actividades Diseñadas ... 73
9.2.4. Interacciones con el Medio y Comportamientos Esperados ... 74
9.2.5. Información Complementaria ... 74
9.2.6. Programación de Actividades ... 74
10. FASE EXPERIMENTAL ... 75

10.1. Descripción de los Objetos de Investigación 75
10.2. Puesta en Escena de las Situaciones Didácticas 76
10.3. Logros y Dificultades Encontrados en las Actividades 76
10.3.1. Resultados y Análisis Secuencia sobre Razones 76
10.3.2. Resultados y Análisis Secuencia sobre Proporciones 77
10.3.3. Resultados y Análisis Secuencia sobre Proporcionalidad 77
10.3.4. Resultados y Análisis Secuencia sobre Porcentaje 77
10.3.5. Resultados y Análisis Secuencia sobre P. Geométrica 77
11. ANÁLISIS A POSTERIORI 78
11.1. Comparación entre lo Encontrado en el Análisis a Priori y el Análisis a Posteriori 78
11.2. Comparación entre la Actividad de Exploración y la Prueba Final 78
11.3. Observaciones 85
11.3.1. Semejanza entre lo esperado y lo observado 85
11.3.2. Diferencia entre lo esperado y lo observado 86
12. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES 87
12.1. Conclusiones 87
12.1.1. Con relación al primer objetivo específico 88
12.1.2. Con relación al segundo objetivo específico 89
12.1.3. Con relación al tercer objetivo específico 90
12.1.4. Con relación al cuarto objetivo específico 91
12.2. Recomendaciones 92
12.3. Sugerencias para futuras investigaciones 93
13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 95

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Respuesta del Estudiante E1 6

Gráfico 2: Respuesta del Estudiante F1.......... 8

Gráfico 3: Razón: Significado y usos 29

Gráfico 4: Relación de Proporcionalidad: Caracterización y Representación 32

Gráfico 5: Proporcionalidad Geométrica.......... 40

Gráfico 6: Respuesta pregunta 1 Actividad de Exploración.......... 62

Gráfico 7: Respuesta pregunta 2 Actividad de Exploración 62

Gráfico 8: Respuesta pregunta 3 Actividad de Exploración 63

Gráfico 9: Respuesta pregunta 3 Actividad de Exploración 63

Gráfico 10: Respuesta pregunta 4 Actividad de Exploración 63

Gráfico 11: Respuesta pregunta 5 Actividad de Exploración 64

Gráfico 12: Respuesta pregunta 6 Actividad de Exploración 64

Gráfico 13: Respuesta pregunta 7 Actividad de Exploración 65

Gráfico 14: Respuesta pregunta 8 Actividad de Exploración 65

Gráfico 15: Respuesta pregunta 9 Actividad de Exploración 66

Gráfico 16:Genero de los estudiantes.......... 75

Gráfico 17: Edad de los estudiantes 75

Gráfico 18: Procedencia de los estudiantes 76

Gráfico 19: Respuesta a la pregunta 1 de la prueba final 80

Gráfico 20: Respuesta a la pregunta 2 de la prueba final 80

Gráfico 21: Respuesta a la pregunta 3 de la prueba final 81

Gráfico 22: Respuesta a la pregunta 4 de la prueba final 81

Gráfico 23: Respuesta a la pregunta 5 de la prueba final 82

Gráfico 24: Respuesta a la pregunta 6 de la prueba final 82

Gráfico 25: Respuesta a la pregunta 7 de la prueba final 82

Gráfico 26: Respuesta a la pregunta 8 de la prueba final 83

Gráfico 27: Respuesta a la pregunta 9 dela prueba final 83

Gráfico 28: Respuesta a la situación 2, ítem 1.1 178

Gráfico 29: Respuesta a la situación 2, ítem 1.2 178

Gráfico 30: Respuesta a la situación 2, ítem 1.3 179

Gráfico 31: Respuesta a la situación 2, ítem 1.4 179

Gráfico 32: Respuesta a la situación 2, ítem 1.4 180

Gráfico 33: Respuesta a la situación 2, ítem 2.1 180

Gráfico 34: Respuesta a la situación 2, ítem 3.1 181

Gráfico 35: Respuesta a la situación 2, ítem 3.1 181

Gráfico36 : Respuesta a la situación 2, ítem 3.3 182

Gráfico 37: Respuesta a la situación 2, ítem 3.5 183

Gráfico 38: Respuesta a la situación 2, ítem 3.5 183

Gráfico 39: Respuesta a la situación 2, ítem 4.2a.. 184

Gráfico 40: Respuesta a la situación 2, ítem 4.2a 184

Gráfico 41: Respuesta a la situación 2, ítem 4.2b 185

Gráfico 42: Respuesta a la situación 2, ítem 4.2b 185

Gráfico 43: Respuesta a la situación 2, ítem 4 187

Gráfico 44: Respuesta a la situación 2, ítem 5.1 188

Gráfico 45: Respuesta a la situación 3, ítem 1.1 191

Gráfico 46: Respuesta a la situación 3, ítem 1.2 191

Gráfico 47: Respuesta a la situación 3, ítem 1.3 192

Gráfico 48: Respuesta a la situación 3, ítem 1.4 192

Gráfico 49: Respuesta a la situación 3, ítem 3.1 193

Gráfico 50: Respuesta a la situación 3, ítem 3.3 193

Gráfico 51: Respuesta a la situación 3, ítem 4.1 194

Gráfico 52: Respuesta a la situación 3, ítem 4.2 195

Gráfico 53: Respuesta a la situación 3, ítem 4.2 195

Gráfico 54: Respuesta a la situación 3, ítem 4.3 196

Gráfico 55: Respuesta a la situación 3, ítem 4.5 196

Gráfico 56: Respuesta a la situación 3, ítem 4.5 197

Gráfico 57: Respuesta a la situación 3, ítem 4 198

Gráfico 58: Respuesta a la situación 3, ítem 6 200

Gráfico 59: Respuesta a la situación 3, ítem 6.1 200

Gráfico 60: Respuesta a la situación 3, ítem 6.2 201

Gráfico 61: Respuesta a la situación 3, ítem 6.3 201

Gráfico 62: Respuesta a la situación 3, ítem 7.1 202

Gráfico 63: Respuesta a la situación 3, ítem 7.2 203

Gráfico 64: Respuesta a la situación 3, ítem 7.3 203

Gráfico 65: Respuesta a la situación 3, ítem 7.3 204

Gráfico 66: Respuesta a la situación 3, ítem 7.5 204

Gráfico 67: Respuesta a la situación 3, ítem 7.7 205

Gráfico 68: Respuesta a la situación 3, ítem 9 206

Gráfico 69: Respuesta a la situación 3, ítem 9 206

Gráfico 70: Respuesta a la situación 3, ítem 9.1 207

Gráfico 71: Respuesta a la situación 3, ítem 9.2 207

Gráfico 72: Respuesta a la situación 3, ítem 9.3 208

Gráfico 73: Respuesta a la situación 4, ítem 1.4 211

Gráfico 74: Respuesta a la situación 4, ítem 1.5 211

Gráfico 75: Respuesta a la situación 4, ítem 1.5 212

Gráfico 76: Respuesta a la situación 4, ítem 1.7 212

Gráfico 77: Respuesta a la situación 4, ítem 1.8 213

Gráfico 78: Respuesta a la situación 4, ítem 1.8 214

Gráfico 79: Respuesta a la situación 4, ítem 1 215

Gráfico 80: Respuesta a la situación 4, ítem 2.5 217

Gráfico 81: Respuesta a la situación 4, ítem 2.5 217

Gráfico 82: Respuesta a la situación 4, ítem 2.7 218

Gráfico 83: Respuesta a la situación 4, ítem 4 219

Gráfico 84: Respuesta a la situación 4, ítem 5 220

Gráfico 85: Respuesta a la situación 5, ítem 1 222

Gráfico 86: Respuesta a la situación 5, ítem 2.1 223

Gráfico 87: Respuesta a la situación 5, ítem 2.1 224

Gráfico 88: Respuesta a la situación 5, ítem 2.3 224

Gráfico 89: Respuesta a la situación 5, ítem 2.3 225

Gráfico 90: Respuesta a la situación 5, ítem 3.1 225

Gráfico 91: Respuesta a la situación 5, ítem 3.1 226

Gráfico 92: Respuesta a la situación 5, ítem 3.2 226

Gráfico 93: Respuesta a la situación 5, ítem 3.3 227

Gráfico 94: Respuesta a la situación 5, ítem 3.4 227

Gráfico 95: Respuesta a la situación 5, ítem 3.5 228

Gráfico 96: Respuesta a la situación 5, ítem 3 229

Gráfico 97: Respuesta a la situación 5, ítem 4.1 231

Gráfico 98: Respuesta a la situación 5, ítem 4.3 231

Gráfico 99: Respuesta a la situación 6, ítem 1.1 234

Gráfico 100: Respuesta a la situación 6, ítem 2 234

Gráfico 101: Respuesta a la situación 6, ítem 3.2 235

Gráfico 102: Respuesta a la situación 6, ítem 3.4 236

Gráfico 103: Respuesta a la situación 6, ítem 5.1 237

Gráfico 104: Respuesta a la situación 6, ítem 6.1 238

Gráfico 105: Respuesta a la situación 6, ítem 6.1 239

Gráfico 106: Respuesta a la situación 6, ítem 6.3 240

Gráfico 107: Respuesta a la situación 6, ítem 6 241

Gráfico 108: Respuesta a la situación 6, ítem 7.4 243

Gráfico 109: Respuesta a la situación 6, ítem 7.6 243

Gráfico 110: Respuesta a la situación 6, ítem 7.7 244

Gráfico 111: Respuesta a la situación 6, ítem 7.7 244

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Relación de Investigaciones Citadas en el Estado del Arte 23

Tabla 2: Interpretaciones del Numero Racional 26

Tabla 3: Fases del Diseño Metodológico 56

Tabla 4: Conocimientos previos a evaluar 59

Tabla 5: Resultado calificación cualitativa de la actividad diagnostica 60

Tabla 6: Comentarios sobre los resultados obtenidos en la prueba 61

Tabla 7: Comentarios obtenidos actividad de exploración...................................... 61

Tabla 8: Autores guías de aprendizaje.. 66

Tabla 9: Anexo secuencias didácticas 73

Tabla 10: Genero de los estudiantes 75

Tabla 11: Edad de los estudiantes... 75

Tabla 12: Procedencia de los estudiantes 76

Tabla 13: Resultados calificación cualitativa prueba final...................................... 78

Tabla 14: Resultados calificación cuantitativa prueba final 79

Tabla 15: Resultados de la prueba final 79

Tabla 16: Tabla comparativa entre la actividad de exploración y la
prueba final 84

Tabla 17: Variables Microdidácticas... 102

Tabla 18: Variables Microdidácticas en la secuencias 106

Tabla 19: Comportamientos esperados secuencia sobre razones 140

Tabla 20: Comportamientos esperados secuencia sobre proporciones 144

Tabla 21: Comportamientos esperados secuencia sobre proporcionalidad 152

Tabla 22: Comportamientos esperados secuencia sobre porcentajes 158

Tabla 23: Comportamientos esperados secuencia sobre P. geométrica 162

Tabla 24: Información complementario de las secuencias didácticas.................... 170

Tabla 25: Programación de actividades.. 172

Tabla 26: Cronograma de actividades 174

Tabla 27: Calificación cuantitativa secuencia sobre razones 176

Tabla 28: Resultados cualitativos de la situación 2, ítem 4.................................. 186

Tabla 29: Resultados cuantitativos de la situación 2, ítem 4................................ 186

Tabla 30: Calificación cuantitativa secuencia sobre proporciones......................... 189

Tabla 31: Resultados cualitativos de la situación 3, ítem 4.................................. 197

Tabla 32: Resultados cuantitativos de la situación 3, ítem 4................................ 198

Tabla 33: Calificación cuantitativa secuencia sobre proporcionalidad 209

Tabla 34: Resultados cualitativos de la situación 4, ítem 1.................................. 214

Tabla 35: Resultados cuantitativos de la situación 4, ítem 1................................ 215

Tabla 36: Calificación cuantitativa secuencia sobre porcentajes 221

Tabla 37: Resultados cualitativos de la situación 5, ítem 3.................................. 229

Tabla 38: Resultados cuantitativos de la situación 5, ítem 3................................ 229

Tabla 39: Calificación cuantitativa secuencia sobre P. geométrica 232

Tabla 40: Resultados cualitativos de la situación 6, ítem 6.................................. 240

Tabla 41: Resultados cuantitativos de la situación 6, ítem 6................................ 241

Tabla 42: Comportamientos esperados y observados secuencia didáctica sobre razones... 245

Tabla 43: Comportamientos esperados y observados secuencia didáctica sobre proporciones 250

Tabla 44: Comportamientos esperados y observados secuencia didáctica sobre proporcionalidad 256

Tabla 45: Comportamientos esperados y observados secuencia didáctica sobre porcentajes 259

Tabla 46: Comportamientos esperados y observados secuencia didáctica sobre proporcionalidad geométrica 261

LISTA DE DIAGRAMAS

Diagrama 1: Fases de la Teoría de la Situación Didáctica 51

ANEXOS

Anexo 1: Actividad de razón, proporción y proporcionalidad 100
Anexo 2: Variables microdidácticas... 102
Anexo 3: Variables microdidácticas en las secuencias didácticas 106
Anexo 4: Secuencia didáctica sobre razones 111
Anexo 5: Secuencia didáctica sobre proporciones 114
Anexo 6: Secuencia didáctica sobre proporcionalidad 121
Anexo 7: Secuencia didáctica sobre porcentajes 127
Anexo 8: Secuencia didáctica sobre proporcionalidad geométrica 131
Anexo 9: Comportamientos esperados en las secuencias didácticas...................... 140
Anexo 10: Información complementaria de las secuencias didácticas................... 170
Anexo 11: Programación de actividades 172
Anexo 12: Cronograma de actividades.. 174
Anexo 13: Analisis de la secuencia didáctica sobre razones................................. 176
Anexo 14: Analisis de la secuencia didáctica sobre proporciones 189
Anexo 15: Analisis de la secuencia didáctica sobre proporcionalidad................... 209
Anexo 16: Analisis de la secuencia didáctica sobre porcentajes............................ 221
Anexo 17: Analisis de la secuencia didáctica sobre proporcionalidad geométrica 232
Anexo 18: Comportamientos esperados y observados en las secuencias D. 245
Anexo 19: Análisis Epistemológico. 266

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Este trabajo se puede identificar como una investigación en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, pues uno de sus propósitos y objetivos de estudio corresponde con los conocimientos matemáticos que se enseñan en el aula de clase con la finalidad especifica que éstos sean aprendidos en situaciones escolares. El problema de investigación se expone desde la perspectiva de las estructuras multiplicativas hasta llegar al concepto de fracción y luego al de razón, posteriormente, se muestran las dificultades que presentan los estudiantes con respecto a los conceptos de proporción, proporcionalidad aritmética y proporcionalidad geométrica.

1.1. Estructuras Multiplicativas

En el mundo actual los cambios constantes y rápidos en ciencia y tecnología han hecho que los conocimientos, las herramientas y las maneras de hacer y comunicar la matemática evolucionen constantemente. Por esto, tanto el aprendizaje como la enseñanza de la matemática deben estar enfocados en el desarrollo de destrezas necesarias para que el estudiante sea capaz de resolver problemas cotidianos, a la vez que se fortalece el pensamiento lógico y creativo, permitiéndole alcanzar la capacidad de discernir lo esencial de lo auxiliar.

Los aprendizajes matemáticos, de modo muy especial, constituyen una cadena en la que cada conocimiento va enlazado con los anteriores de acuerdo con un proceder lógico. El nivel de dificultad de los contenidos no sólo viene marcado por las características del propio contenido matemático sino también por las características psicológicas y cognitivas de los alumnos. Esto ha de quedar reflejado en la selección y organización de los contenidos y puesto de manifiesto a la hora de la presentación de los mismos, ya que, en caso contrario, el alumno recibirá unos contenidos inconexos, fraccionados y poco estructurados, con las consiguientes dificultades y lagunas de aprendizaje (Carrillo, 2009 p. 9).

Entre estas dificultades, aprender a multiplicar de los niños es una de las preocupaciones más habituales para los docentes y los padres de estudiantes de Primaria. A diferencia de otros conceptos matemáticos, nadie discute que aprender a multiplicar es necesario e imprescindible tanto para desenvolverse en la vida como para avanzar en el aprendizaje matemático. Saber usar la operación de la multiplicación en la resolución de un problema y tener una cierta agilidad para ello la facilita mucho la vida.

Se trata de matemáticas que se van a usar en el día a día y que además se necesitarán para aprender a dividir, para resolver multitud de problemas y en definitiva para construir el andamiaje de las matemáticas. A pesar de su importancia, se presentan cinco motivos por los cuales los jóvenes tienen dificultades para aprender a multiplicar: los conocimientos matemáticos previos son débiles, la multiplicación está descontextualizada, los recursos que se les presentan para aprender son siempre iguales, el ritmo no es el adecuado al estudiante y el estudiante está presionado a aprender. (Martin, 2016)

El estudio de la estructura multiplicativa se aborda desde al menos cuatro puntos de vista diferenciados a saber: como operación mental, como tabla de multiplicar, desde la perspectiva de los algoritmos y desde el enfoque de resolución de problemas (Orozco, 1996 p. 1). La escuela dedica varios años de la primaria al aprendizaje de las tablas de multiplicar y de los algoritmos, convirtiendo estos dos contenidos en uno de los principales objetivos de la enseñanza en la primaria. Sin embargo, es un hecho que al finalizar la primaria, muchos alumnos no utilizan la multiplicación y emplean la suma reiterada para resolver problemas de tipo multiplicativo. La ausencia de la operación multiplicativa en los procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver problemas, es uno de los grandes causantes del fracaso de la primaria y secundaria.

Las estructuras multiplicativas hacen referencia al conjunto de situaciones que pueden ser resueltas empleando divisiones o multiplicaciones y es necesario abordarlas desde la perspectiva de la proporcionalidad. Así, no se considera la multiplicación como una relación exclusiva de tres términos, sino que se plantea de forma explícita la existencia del cuarto término, en tanto se involucran variaciones simultáneas y comparaciones múltiples (Botero, 2006). Por lo tanto, las estructuras multiplicativas son fundamentales porque reflejan situaciones de proporcionalidad y regla de tres.

1.2. El Concepto de Proporcionalidad

Aprender matemáticas permite que el estudiante comprenda más y mejor el mundo que lo rodea, pero para lograrlo se requiere de un proceso adecuado de enseñanza-aprendizaje con el fin de que los conceptos básicos de esta ciencia sean incorporados por ellos y por lo tanto desarrollen altas competencias[1] en educación matemática. Uno de los conceptos matemáticos importantes es el de proporcionalidad, debido a que es fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional, es transversal con diversas disciplinas a lo largo de la vida escolar, su estrecho vínculo con numerosos problemas del entorno y es una herramienta que permite mejorar los niveles de comprensión, promover actitudes de observación, registro y utilización del lenguaje matemático; es un concepto reconocido como parte de los conocimientos básicos que toda persona debe poseer.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto que los estudiantes basan su razonamiento intuitivo sobre las razones y proporciones en técnicas aditivas y de recuento en lugar de razonar en términos multiplicativos, lo que indica una deficiencia importante. (Godino y Batanero. 2002 p. 439). El concepto de proporcionalidad constituye un campo ampliamente investigado en los últimos cincuenta años; evaluaciones recientes muestran que éstos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender por la mayoría de los estudiantes, lo que constituye un certero indicador de la necesidad de hacer mayor investigación didáctica que permita nuevas comprensiones de dicha problemática y, por

---

[1] Competencia: conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN, p 49.

esa vía, lograr mayores impactos en el sistema educativo. (Obando, Vasco y Arboleda, 2014 p. 1).

Desde la primaria el estudiante tiene una aproximación del concepto de razón y proporción con el manejo de estructuras multiplicativas, el concepto de fracción y la solución de problemas sencillos que involucran regla de tres, pero en el tratamiento tradicional que se da a la multiplicación en el contexto escolar, esta es analizada prácticamente a partir de una única interpretación: la suma de sumandos iguales. Si bien esa interpretación marca una ruta indispensable en el tránsito del pensamiento aditivo al multiplicativo, si el trabajo se deja solo a este nivel, queda a un nivel muy inicial, y en el fondo no se favorece el desarrollo del pensamiento multiplicativo en los alumnos (Obando, 2006 p. 22)

El concepto de razón, desde la revisión realizada en libros de texto de la básica primaria y secundaria, ha sido enseñado solo desde lo numérico como el cociente entre dos cantidades; la expresión ***a*** *es a* ***b*** ha sido concebida como a dividido b, lo cual es una manera errónea de entender la razón, pues sólo se hace desde su contexto numérico (Ibarra, 2013 p. 2). El concepto de razón está implícitamente asociado a los números racionales y puede confundir al estudiante al tratarla como una fracción o división y no como una relación entre dos partes. Este tipo de confusiones impide que haya una construcción significativa del objeto matemático que se quiere que los estudiantes aprendan.

La organización escolar de la multiplicación y la proporcionalidad, se caracterizan por: “no mostrar de manera explícita la relación entre la multiplicación y la proporcionalidad; presentar la proporcionalidad al margen del estudio de las magnitudes; estudiar multiplicación y proporcionalidad al margen del análisis de los procesos de covariación entre magnitudes; y finalmente, se deslinda una separación entre la proporcionalidad y las funciones” (Obando, 2006 p. 122).

Comprender el concepto de razón es indispensable para el trabajo con proporciones y adquirir la destreza para resolver aplicaciones en situaciones de proporcionalidad directa, inversa o compuesta. Con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo que están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente. (Godino y Batanero, 2002 p.425)

La metodología Escuela Nueva intenta acercar al estudiante al concepto de proporcionalidad mediante el uso de guías de aprendizaje como recurso didáctico, pero en su proceso de aprendizaje los estudiantes reunidos en grupos leen las actividades propuestas y tratan de resolverlas, presentándose en su desarrollo las siguientes dificultades: no relacionan los términos de una razón con la actividad propuesta, se les dificulta comprender que es una proporción y para qué se utiliza, les cuesta tabular los datos, graficar las magnitudes de estudio o interpretar las gráficas, reconocer la relación entre las variables y ademas solucionan las aplicaciones de regla de tres simple de forma mecánica sin analizar el tipo de magnitudes que intervienen.

Desde mi experiencia como docente de matemáticas de grado sexto a noveno he apreciado las dificultades que tienen los estudiantes para apropiarse del concepto de proporcionalidad debido a la estrategia o metodología de estudio, se explica la teoría básica y varios ejemplos, luego los estudiantes generalmente trabajan en grupos para resolver las guías de trabajo, las cuales se encuentran clasificadas por actividades y se resuelven de forma secuencial, son pocos los alumnos que las resuelven mientras los otros copian los resultados, los problemas se resuelven de forma mecánica sin fijarse en el tipo de magnitudes que están trabajando. Al evaluar el proceso los resultados son bajos y las conceptualizaciones pobres.

Se desarrolla una actividad en el aula con los estudiantes de grado octavo, el ejercicio consta de varias preguntas sobre razones, proporciones y proporcionalidad, en la pregunta sobre razones se busca que los alumnos comparen dos cantidades por medio de una razón o establezcan una relación multiplicativa entre dos números naturales.

1. Los estudiantes de grado séptimo se comprometieron en plantar árboles. El profesor del grup presenta un cuadro resumen de la cantidad de estudiantes comprometidos para esta actividad

ÁRBOLES	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
Café	6	4	10
Plátano	2	6	8
Total	8	10	18

Completa la tabla y luego escribe la razón entre: (simplifica y explica el resultado)

a) El número de niños que plantaron café y el total de niños del grado

b) El número de niñas que plantaron plátano y el total de estudiantes del grado

A= 4 niños plantaron cafe, y el total de niños de grado que plantar cafe fueron 10 niños

B= 2 niñas plantaron platano y el total de ninos de grado que plantaron platano fueron 8

Grafico 1. Respuesta Estudiante E1

El estudiante E1 presente dificultades al relacionar por medio de un cociente el número de niños que plantaron café y el total de niños del grupo, solo se limita a escribir textualmente las cantidades involucradas, esto pone en evidencia la dificultad de los alumnos para relacionar los dos términos involucrados y expresar la relación entre estas dos cantidades como una medida relativa de una de ellas con respecto a la otra.

1.3. Proporcionalidad Geométrica

Los aspectos geométricos han sido tratados durante mucho tiempo de forma muy superficial, casi de pasada, como si lo importante y fundamental de las matemáticas fueran sólo los cálculos numéricos y el trabajo del álgebra. Los programas de matemáticas, elaborados por la mayoría de los profesores y en los libros de texto sólo trataban en los tres o cuatro últimos temas sobre geometría, incurriendo por lo general en el tópico de que al estar al final del programa no daba mucho tiempo a darlo (Luengo, 1997 p. 98).

La enseñanza de la proporcionalidad geométrica se ha visto limitada no solo a un trabajo puramente aritmético y muchas veces descontextualizado, sino también, al corto o nulo tiempo que se le asigna en la planeación del área. No se debe desconocer la importancia de la proporcionalidad aritmética y la forma como interviene en la enseñanza de los conceptos de razón, fracción, porcentajes, variación, relaciones y función lineal entre otros; incluso el concepto de proporcionalidad es utilizado en otras áreas del saber cómo en Física o Química al trabajar con magnitudes.

Sin embargo, cuando se habla de proporcionalidad geométrica su énfasis no es notorio en los planes de área de la asignatura, no se encuentra de forma detallada y aparece de forma fragmentada en diferentes grados de la educación básica primaria y secundaria, enfocando estos temas hacia lo aritmético sin hacer una relación entre los conceptos de semejanza, teorema de Thales, triángulos rectángulos, conceptos relacionados específicamente con la proporcionalidad geométrica.

El estudio de la proporcionalidad geométrica inicia desde la educación básica con los conceptos de cantidad y magnitud, segmentos proporcionales, figuras semejantes y escalas. En educación secundaria se incluye razón y operación entre segmentos, teorema de Thales, semejanzas en el plano, homotecias, figuras semejantes, semejanza de triángulos, entre otros. Por lo general, estos temas no tienen una secuencia en los planes de área y son vistos de manera independiente sin establecer la relación entre ellos. Los estudiantes los aprenden de forma aislada y en muchos casos resuelven sus aplicaciones de forma mecánica.

Se desarrolla una actividad en el aula con los estudiantes de grado octavo, el objetivo es que ellos utilicen las propiedades de los triángulos semejantes, identifiquen un criterio de semejanza y establezcan la proporción entre sus lados para hallar la incógnita. La actividad implica un tratamiento cuantitativo numérico, dado que en ella se establece la igualdad entre la medida de la cantidad de magnitud de diferentes segmentos. Con respecto a la proporcionalidad geométrica y semejanza se pueden plantear la siguiente proporción entre las medidas de los segmentos así: $\frac{x}{4} = \frac{10,8}{6,4}$

7. Semejanza de triángulos. Un poste vertical de 4 metros de alto, proyecta una sombra de 6,4 metros. ¿Cuál es la altura de un árbol que a la misma hora, proyecta una sombra de 10,8 metros? Realiza el dibujo.

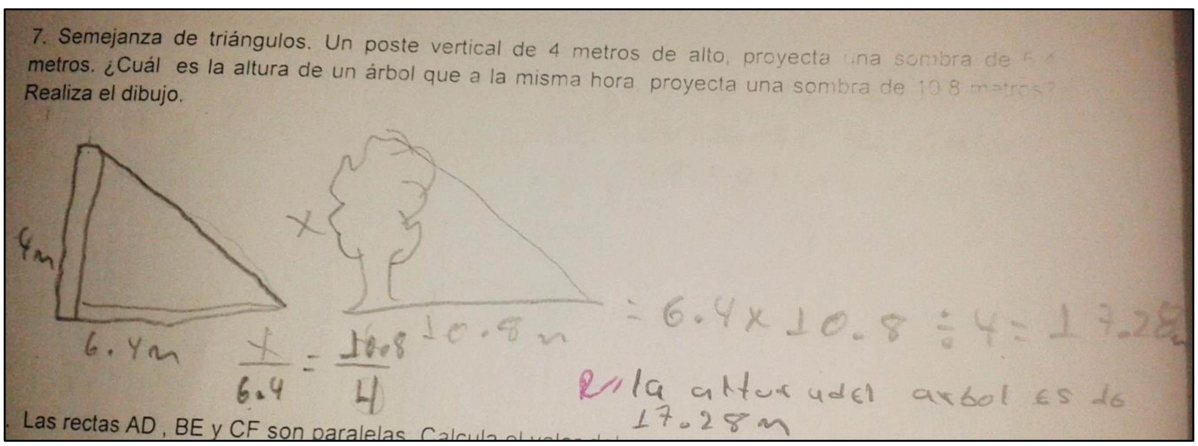


Gráfico 2. Respuesta Estudiante F1.

El estudiante F1 presenta problemas en las proporciones del gráfico y al relacionar las medidas de la magnitud de los lados de los triángulos por medio de una proporción. Esto evidencia la dificultad que tienen los alumnos al establecer la relación entre magnitudes por medio de una razón y no reconocen un criterio de semejanza de triángulos que permita crear una proporción adecuada entre los lados de los triángulos de acuerdo a la situación planteada. El 46,67% de los estudiantes contestaron de forma incorrecta, el 20% lo dejo en blanco, en muchos casos el ejercicio fue resuelto de forma mecánica sin analizar la correspondencia entre los lados y el resultado final.

Debido a las dificultades encontradas en los estudiantes, relacionadas con los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad aritmética y geometría es necesario realizar una investigación que dé respuesta a la pregunta:

1.4. Pregunta de Investigación

¿Cómo analizar la comprensión del concepto de proporcionalidad y sus aplicaciones geométricas, en estudiantes de postprimaria del modelo escuela nueva, mediante una ingeniería didáctica?

2. OBJETIVO GENERAL

Analizar la comprensión del concepto de proporcionalidad y sus aplicaciones geométricas, en estudiantes de postprimaria del modelo escuela nueva, mediante una ingeniería didáctica

3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Conocer los aspectos históricos - epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad.
- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven actividades que involucran los conceptos de razón, proporción, y proporcionalidad aritmética y geométrica.
- Analizar la comprensión de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica que logran los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, mediante actividades y problemas de su entorno.
- Validar el nivel de aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica logrado por los estudiantes, mediante la comprensión del análisis a priori y posteriori.

4. JUSTIFICACIÓN

El proceso de aprendizaje de las matemáticas permite desarrollar en los alumnos la capacidad de razonamiento, les ayuda a pensar de una manera más crítica, a comprender mejor el mundo que los rodea y a resolver problemas cotidianos de una manera más objetiva. Las instituciones educativas urbanas y rurales buscan fomentar y potencializar el aprendizaje de las matemáticas con el propósito que los estudiantes comprendan y le den un significado a los conceptos vistos en el área, puedan apreciar su aplicabilidad y reforzar sus conocimientos.

El aprendizaje matemático se logra cuando el estudiante produce abstracciones matemáticas a partir de obtener información, observar propiedades, establecer relaciones y resolver problemas concretos. Para ello es necesario traer al aula situaciones cotidianas que supongan desafíos matemáticos atractivos, usar habitualmente recursos y materiales didácticos para ser manipulados por el estudiante y transferir conocimientos en los diferentes ámbitos de su vida. El propósito es desarrollar en el estudiante un pensamiento lógico-analítico que le facilite descomponer los argumentos en las premisas que lo componen, ver las relaciones que hay entre ellas, su conclusión y poder juzgar la veracidad o confiabilidad de la misma. De igual forma, propiciar varios aspectos de la actividad intelectual como la creatividad, la intuición, la capacidad de análisis y la crítica.

En este proceso, la Educación Matemática considerada como un conjunto de ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional (Rico y Sierra, 1999), ha estado en continua investigación para dar respuesta a las permanentes y crecientes demandas de un mundo cada vez más dependiente de la tecnología y, por ello mismo, de la propia matemática, buscando que la formación en este área pueda contribuir en la capacitación del estudiante para asumir y enfrentar los retos que la cotidianidad le imponen. Por lo anterior, el papel del docente será el de responder sobre qué matemática se enseña en el colegio, como se aprende esta asignatura, qué y cómo debería enseñarse, utilizando propuestas didácticas que impacten sobre su entorno de trabajo y representen desafíos intelectuales en sus alumnos, con experiencias matemáticas interesantes y significativas que faciliten la construcción, desarrollo y adquisición de los conceptos.

De acuerdo a lo anterior, mejorar las prácticas educativas sobre el concepto de proporcionalidad es importante porque permite potenciar las competencias en el área de matemáticas al facilitar la comprensión de: la variación entre magnitudes, el cambio de unidades de medidas, las nociones de razón y fracción, escalas, porcentajes, magnitudes directa e inversamente proporcionales, repartos proporcionales, proporcionalidad compuesta, mezclas, su representación gráfica aproxima al concepto de función, ideas geométricas como semejanza, congruencia, teorema de Thales entre otros, solución de problemas no solo de matemáticas, sino de otras áreas como en física, química, etc.

Con relación a la proporcionalidad, la simple elección al comprar productos de acuerdo a la relación peso/precio como así también las informaciones gráficas y numéricas, que exigen de una interpretación crítica, son algunas de las acciones que requieren de la utilización de nociones y procedimientos vinculados con la misma. Sin embargo, no sólo se trata de presentar una diversidad de problemas de estos ámbitos para que los alumnos apliquen conocimientos aprendidos. Los problemas se reformulan y cambian día a día, y abordarlos requiere de conocimientos versátiles. Esto mismo es requerido por la movilidad laboral que caracteriza nuestra sociedad actual (Crippa, 2005 p. 10).

La importancia de la proporcionalidad en la enseñanza de acuerdo con (Fiol, 1990 p.118) se justifica por las siguientes razones:

1. Desde la enseñanza de la matemáticas y desde finales de la primaria y en todo el periodo de secundaria, se puede considerar que el tema de la proporcionalidad es núcleo a partir del cual se unifican las líneas básicas de nociones como:
    - Razón y proporción.
    - Fracción y número racional.

- Cambio de unidades, cambio de escalas.
- Problemas de repartos proporcionales.
- Problemas “clásicos” de regla de tres.
- Porcentajes.
- Gráficas de funciones lineales.
- Teorema de Thales.
- Semejanza de figuras.
- Escalas, mapas y maquetas.
- Funciones trigonométricas.
- El número π.

2. En las ciencias la proporcionalidad es uno de los instrumentos más importantes, con frecuencia muchos de los conceptos de Física y Química son en realidad nombres dados a relaciones de proporcionalidad, como por ejemplo: la velocidad, la aceleración, la densidad, la presión, las concentraciones, las dilataciones, la ley de Ohm, la ley de Hooke o la ley de Proust.
3. Además el concepto de proporcionalidad aparece incluso a finales de Primaria en el currículo de ciencias sociales bajo distintas formas: densidad de población, tasa de natalidad, así como en la lectura de mapas y de diversos tipos de gráficos.
4. Pero la proporcionalidad no es importante sólo desde el punto de vista de las ciencias, sino que también tiene una importancia fundamental desde el punto de vista del desarrollo de la inteligencia. Así, la epistemología genética la considera uno de los esquemas operativos fundamentales del estadio de las operaciones formales.

La comprensión del concepto de proporcionalidad ayuda al razonamiento y debe servir como instrumento para desarrollar procesos de comunicación y solución de problemas. Parte de la relación entre las magnitudes involucradas en una razón, interviene en procesos de variación acercando al concepto de función lineal y resolver aplicaciones de matemáticas y otras áreas. El tratamiento de las magnitudes y sus procesos de medición se constituyen la base sobre la cual se organizan los procesos conceptuales de cada pensamiento. El estudio de la variación hace necesaria una referencia a la identificación de variables, y por tanto, al reconocimiento de las magnitudes y de las medidas de las cantidades asociadas. (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006 p. 69).

La presente investigación surge a raíz de: la experiencia de trabajo con los estudiantes de postprimaria de los grados octavo y noveno, los cuales están más orientados a resolver problemas de proporcionalidad de forma mecánica sin darle un sentido lógico a lo que están solucionando. Para enriquecer a la comunidad académica con esta investigación, ya que son pocos los trabajos que se han desarrollado que aborden los temas de razones, proporciones y proporcionalidad aritmética y geométrica a la vez usando como metodología la ingeniería didáctica. Mejorar los procesos pedagógicos sobre el concepto de proporcionalidad y repercutir en los resultados de las pruebas saber de grado noveno.

La labor del docente es importante específicamente en la dimensión didáctica, para la creación de una propuesta de enseñanza que incite al estudiante la participación activa en su proceso de aprendizaje y la motivación para el estudio de las matemáticas, en especial de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica. Por esto, se considera como marco Teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, para elaborar varias situaciones didácticas que permitan establecer un ambiente propicio, donde los contenidos sean de interés de los estudiantes.

Este trabajo pretende que los estudiantes de la Institución Educativa Hojas Anchas sede Rafael Uribe Uribe adquieran los conceptos, habilidades, competencias y significación del objeto matemático mediante una intervención didáctica que permita desarrollar una unidad de aprendizaje potencialmente significativa para desarrollar el pensamiento proporcional como herramienta de gran poder intelectual y así mejorar los niveles de competencia en el área de matemáticas.

5. ESTADO DEL ARTE

En el área de matemáticas son muchas las investigaciones que se han hecho sobre proporcionalidad debido a su importancia para el desarrollo del pensamiento lógico-analítico. Para la realización de este trabajo se examinaron y analizaron varios artículos y estudios realizados alrededor de la proporcionalidad, valorando y considerando aportes e investigaciones como antecedentes que me permitieron establecer criterios en cuanto a las dificultades más comunes para el aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, aplicaciones en diferentes áreas, metodologías para su enseñanza, el trabajo en el aula, etc. Algunos aportes y estudios que se revisaron fueron:

5.1. Aspectos Históricos de Razón, Proporción y Proporcionalidad.

5.1.1. Matemáticas y sus Didáctica para Maestros. Autores Godino, Juan D., Batanero Carmen (2002).

En los aspectos históricos relacionados con estos conceptos, se destaca que el concepto de razón ha sido y es asumido como una comparación, en este sentido expresa que desde la antigüedad el concepto de razón surge de acoger como primer elemento la fracción. Por este hecho, cuando se comparan dos partes como tal, podemos dar una leve idea de razón. Muchos estudiantes comprenden el concepto de razón y lo relacionan como una fracción. Este suceso no ocurren todas las veces, ya que como entendemos que una fracción es cualquier par ordenado de números enteros, donde el denominador es distinto de cero, entonces se podría indicar que una razón es un par ordenado de cantidades de las magnitudes, expresadas en sí mediante un número real y una unidad de medida definida. Es decir, que la razón siempre se define desde la comparación entre magnitudes, mientras las fracciones no siempre lo hacen así.

Es así que los conceptos de razón y proporción a través de la historia han tenido diferentes interpretaciones, por ejemplo, en la antigua Grecia el concepto de razón según (Oller, 2012 p. 30) es entendido como: “La razón entre dos números venia dada por un proceso llamado antifairesis o antamairesis[2], lo que se denominaba como algoritmo de Euclides…", complementa diciendo: "La definición de razón mediante la antifairesis aclaraba el carácter no numérico de tal concepto, pues relacionaba también el proceso de medida, indicando claramente que sólo se consideraban razones entre magnitudes homogéneas" .

En este sentido, cabe destacar que Thales de Mileto usaba sus conocimientos en geometría plana para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y así calcular la distancia a la costa de los barcos.

5.1.2. Notas Históricas. Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número. Autor M. Luisa Fiol, Joseph M. y Fortuny (1990).

La noción de proporción viene asociada desde la antigüedad con la idea de precisar cuantitativamente la noción de semejanza, la cual bajo la forma del teorema de Thales (636 a 546 a de C.) se remonta a la más alta antigüedad y es de uso corriente entre los arquitectos. Esta noción vaga de semejanza tiene sus antecedentes en la de comparar cosas de la misma especie, de hallar sus razones en el sentido corriente del término, es decir, de querer medir sus magnitudes.

Las bases de la idea general de razón son expuestas en el libro V de los Elementos de Euclides (300 a. de C.) utilizando el método axiomático del encadenamiento de los axiomas, definiciones y proporciones. Esta metodología permite hacer una descripción general de las proporciones sin utilizar directamente las nociones aritméticas de los números racionales e irracionales y las geométricas de la semejanza.

5.1.3. Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. Autor Edgar Alberto Guacaneme Suárez (2013).

[2] Hoy denominado Algoritmo de Euclides:

En este documento se presenta un análisis de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el Libro V de los *Elementos*; dicho análisis se nutre de los resultados de la investigación en Historia de las Matemáticas y se organiza a la luz de una interpretación de la *Teoría de Significados Sistémicos* del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados del mismo ofrecen una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, potencialmente útil para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con estos objetos matemáticos.

5.1.4. Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad, autor Edgar Alberto Guacaneme Suárez (2015).

La Historia de las Matemáticas ofrece, entre otros aspectos a favor del conocimiento del profesor de Matemáticas, un ambiente sin igual para ampliar la visión usual sobre los objetos matemáticos y sobre las formas de pensar en Matemáticas. La historia de la proporcionalidad brinda la posibilidad de reconocer al menos dos teorías de la proporción (a saber: pre-eudoxiana y euclidiana) que recurren a sendos tratamientos aditivos de las magnitudes (o cantidades) geométricas. El estudio de aspectos centrales de estas dos teorías no solo logra confrontar el saber matemático usual de los profesores e investigadores sobre las ideas de razón, proporción y razonamiento proporcional, sino que además ofrece opciones para un tratamiento curricular radicalmente innovador de la proporcionalidad y abre una novedosa ventana a la investigación sobre el razonamiento proporcional aditivo.

5.2. Proporcionalidad y su Didáctica para Maestros.

5.2.1. Matemáticas y sus Didáctica para Maestros. Autores Godino, Juan D., Batanero Carmen (2002).

El proyecto Edumat-Maestros , cuyo director es Juan D. Godino, elabora un texto que permite analizar las implicaciones que tiene la enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica y enfatiza en la necesidad de presentar de manera muy clara los conceptos ligados a la proporcionalidad como lo son: razón, proporción y magnitudes proporcionales, vemos que este énfasis va muy de la mano de la teoría de los campos conceptuales de

Vergnaud, quien argumenta que ningún concepto va solitario, sino por el contrario, ligado a otros. En el texto además se hace una crítica importante a la regla de tres reconociendo que da cierta ventaja algorítmica pero que dificulta comprender en muchos casos la naturaleza de los problemas que se pretenden solucionar.

5.2.2. El Conocimiento del Profesor de Matemáticas en la Práctica: Enseñanza de la Proporcionalidad. Autor Torres, Eugenia M (2015).

Uno de los elementos fundamentales del proceso de enseñanza es el profesor, y por lo tanto, la mejora dela enseñanza está relacionada, en parte, con la actuación del profesorado en las aulas. Si bien los trabajos de investigación sobre el profesor, sus conocimientos y creencias, tienen ya algunos años, el estudio sistemático de su práctica docente y en particular de los conocimientos que moviliza en dicha práctica es un campo de investigación reciente.

La investigación parte del profesor, el cual para poder enseñar matemáticas debe tener unos conocimientos solidos del tema que está enseñando, conocimientos que le permitan ayudar al alumno a comprender el tema más allá del soporte didáctico de que disponga. De todos los temas que se abordan en el currículo de matemáticas, el razonamiento multiplicativo (proporciones, tasas y porcentajes) y proporcionalidad es uno de los más complejos matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar. Saber "razonar proporcionalmente" es clave en numerosas aplicaciones prácticas de la vida cotidiana. Es una competencia matemática determinante para poder seguir profundizando tanto en matemáticas como en ciencias después de los años de secundaria obligatoria.

5.2.3. La proporcionalidad, programa Maestros y profesores enseñando y aprendiendo, Autores Crippa, Ana L., Grimaldi. Verónica, Machiunas. María V (2005).

Este material ha sido elaborado en el marco del proyecto Fortalecimiento de la enseñanza de la matemática en EPB, de la Dirección de Educación Primaria Básica, el propósito es reflexionar en torno a la enseñanza de la proporcionalidad en el segundo ciclo de la EPB. En el capítulo 1 se desarrollan temas sobre el enfoque de la enseñanza de la matemática adoptado por la jurisdicción, refiriéndose al tratamiento de proporcionalidad, en el capítulo 2 se centra en el análisis de problemas para el desarrollo de la temática, en el capítulo 3 se discuten posibles vinculaciones de la proporcionalidad con diferentes áreas del saber. El trabajo responde a la pregunta ¿Por qué enseñar proporcionalidad?, y muestra la importancia y utilidad de la matemática desde varios puntos de vista.

5.3. Aprendizaje del Concepto de Proporcionalidad

5.3.1. Razones y Proporciones. Serie del Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 11. Autor Martin Andonegui Zabala (2006).

El trabajo busca construir cada concepto matemático pensando en cómo se enseña en el aula, además de reflexionar acerca de cómo los conocimientos del docente limitan y condicionan su trabajo. Para la construcción matemática del concepto, se explican paso a paso los recursos y actividades que se requieren en el proceso, inicia con un análisis histórico del concepto de razón, la aritmética de las razones, el concepto matemático de proporción y concepto matemático de proporción, resolución de problemas en el campo de las razones y las proporciones, la meta el desarrollo del pensamiento proporcional.

5.3.2. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja. Autor Ceballos, Edgar E (2012).

En este trabajo se presenta un informe de práctica docente. La experiencia de enseñanza está fundamentada en las teorías del aprendizaje, y de manera especial del aprendizaje significativo. Como estrategia metodológica se construyó y aplicó una unidad de enseñanza potencialmente significativa (UEPS). Secuencia didáctica propuesta por el doctor Marco Antonio Moreira para orientar el aprendizaje significativo, en este caso en particular, para facilitar el aprendizaje significativo del concepto de la proporcionalidad.

La UEPS fue aplicada en 35 estudiantes que cursan el grado octavo de la básica secundaria en la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja y los resultados obtenidos muestran la eficacia de la utilización de ésta estrategia didáctica, evidenciados en las tareas resueltas, test aplicados y los registros hechos por el profesor. Desde la experiencia como docente de matemáticas del grado octavo ha observado las dificultades para lograr que las intervenciones pedagógicas permitan que los estudiantes se apropien del concepto de proporcionalidad, porque en muy pocas ocasiones el objetivo es alcanzado, debido generalmente a la ineficacia de la estrategia utilizada que se resume en lo siguiente: se planea la clase en algo menos de 15 minutos, se da en el aula una teoría básica, unos cuantos ejemplos con su infaltable fórmula para aplicar la famosa regla de tres y finalmente ejercicios que permitan aprender, si es que se le puede llamar así, el algoritmo.

5.4 Proporcionalidad en Textos Escolares

5.4.1. Una mirada al Tratamiento de la Proporcionalidad en Textos Escolares de Matemáticas. Autor Edgar A. Guacaneme (2002).

En este artículo se presenta un análisis de algunos textos escolares de matemáticas para grado séptimo que abordan el estudio de la proporcionalidad. Este análisis contempla explícitamente tres objetos de estudio: la estructura general del texto, la configuración interna de las unidades temáticas a través de las cuales se desarrolla el estudio de la proporcionalidad y el tratamiento de algunos temas o conceptos matemáticos centrales en el estudio de la proporcionalidad.

Una de las conclusiones expuestas por el autor indica que en las propuestas curriculares se identificó que el estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad se propone para ser desarrollado fundamentalmente en grados quinto y séptimo y haber considerado específicamente las propuestas curriculares de matemáticas para grado séptimo, fue posible evidenciar que no era una tarea sencilla reconocer a qué disciplina matemática escolar correspondía el estudio de estos temas, aunque se reconoció una tendencia hacia un tratamiento aritmético de éstos. En aquellas propuestas se identificó que excepto las razones, las proporciones y la proporcionalidad, los demás temas fácilmente se pueden hacer corresponder con el estudio de la aritmética, de la geometría o de la estadística (Guacaneme, 2002 p.39).

5.4.2. Estudio Didáctico de la Proporción y la Proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos Matemáticos formales y a los Textos Escolares de Matemáticas. Autor Edgar A. Guacaneme (2001).

En el primer capítulo se presenta una visión de la Didáctica de las Matemáticas —en tanto disciplina y campo de investigación—, reseñando algunas consideraciones acerca de su relación con las matemáticas, y presentando una visión de la comunicación de conocimientos y saberes. En el segundo capítulo se establecen los aspectos específicos de la investigación, contiene en primer lugar, la contextualización y formulación del problema que finalmente se abordó en el trabajo de tesis.

En el tercer capítulo se desarrolla una recapitulación de teorías matemáticas que tratan la proporción y la proporcionalidad a la vez que se realiza un cuidadoso análisis del contenido matemático relacionado. En el cuarto capítulo se presenta el análisis de algunos textos escolares de matemáticas para grado séptimo que contienen un tratamiento de la proporción y la proporcionalidad, el cual está alimentado por un análisis de algunas propuestas curriculares nacionales para la enseñanza de en este grado. El quinto y último capítulo presenta algunas reflexiones que de manera sintética pretenden recapitular algunos de los resultados importantes del trabajo investigativo (Guacaneme, 2001 p.19)

5.5. Proporcionalidad Geométrica

5.5.1. Proporcionalidad Geométrica. Autor Calero, Antonio M (2012).

En textos de la antigüedad se dice que Thales estableció varios teoremas de la geometría, como que los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales, o que los ángulos opuestos de líneas rectas que se cortan son iguales. Entre los resultados más conocidos de Thales se encuentra el teorema que lleva su nombre, relativo a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas, conocido como Teorema de Thales: "*Si dos rectas r y s se cortan por un sistema* *de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los puntos correspondientes en la otra".*

Parte de la leyenda atribuye a Thales el uso de sus conocimientos de geometría para medir las dimensiones de las pirámides de Egipto y calcular la distancia a la costa de barcos en alta mar.

En este trabajo se enseña a calcular la razón entre segmentos, se estudian los criterios de semejanza, y explica cómo interpretar planos y mapas.

5.5.2. Proporcionalidad Geométrica y Semejanza. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Autor Ricardo G. Luengo (1997).

El libro recoge en una colección un conjunto de trabajos realizados por grupos y personas que se dedican a la didáctica de la matemática. La base es la proporcionalidad geométrica y semejanza, donde se proporciona los conceptos fundamentales, se describen los contextos en los que los temas están imbricados y se reflejan las aplicaciones y conexiones más significativas.

El libro se ha estructurado en cinco capítulos que intentan, en primer lugar, dar a conocer los referentes legales y las orientaciones vigentes con respecto al tema de semejanza, además del contexto en el que actualmente se desarrolla la enseñanza. Luego se proporcionan las bases teóricas sobre proporcionalidad geométrica y semejanza, partiendo desde los conceptos más básicos hasta llegar a los teoremas de proporcionalidad tanto en el plano como en el espacio. Se expone un modelo didáctico aportando tanto los fundamentos teóricos como prácticos para la elaboración del instrumento considerado como el eje de la enseñanza - aprendizaje. Finaliza con la propuesta de actividades que el profesor puede utilizar según la situación y el contexto en el que se desenvuelve.

Tabla 1.
Relación de investigaciones citadas en el Estado del Arte

AUTOR	TÍTULO DE LA INVESTIGACIÓN	FECHA
Juan D. Godino	Matemáticas y sus Didáctica para	2002

Carmen Batanero	Maestros.	
M. Luisa Fiol Joseph M. Fortuny	Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número	1990
Edgar Alberto Guacaneme Suárez	Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos.	2013
Edgar Alberto Guacaneme Suárez.	Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad,	2015
Eugenia M. Torres	El Conocimiento del Profesor de Matemáticas en la Práctica: Enseñanza de la Proporcionalidad.	2015
Ana Lía Crippa, Verónica Grimaldi y María Valeria Machiunas	La proporcionalidad, programa Maestros y profesores enseñando y aprendiendo.	2005
Martin Andonegui Zabala.	Razones y Proporciones. Serie del Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 11.	2006
Edgar E. Ceballos	Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja.	2012
Antonio M. Calero	Proporcionalidad Geométrica.	2012
Ricardo G. Luengo	Proporcionalidad Geométrica y Semejanza. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje.	1997
Edgar A. Guacaneme.	Una mirada al Tratamiento de la Proporcionalidad en Textos Escolares de Matemáticas.	2002
Edgar A. Guacaneme.	Estudio Didáctico de la Proporción y la Proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos Matemáticos formales y a los Textos Escolares de Matemáticas	2001

Fuente: Elaboración propia

6. MARCO TEÓRICO

El tema de investigación consiste en analizar la comprensión del concepto de proporcionalidad y sus aplicaciones geométricas, en estudiantes de postprimaria del modelo escuela nueva, mediante la resolución de actividades y problemas extraídos del contexto, estudiado desde la teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, aplicando una Ingeniería Didáctica.

6.1. Marco Teórico Disciplinar

Para realizar una investigación didáctica que contribuya al desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes, es necesario establecer el marco disciplinario que de sustento a lo planteado y permita la obtención del objetivo.

En esta parte se realizarán las definiciones de magnitud, razón, proporción, así como sus principales propiedades y algunos teoremas importantes para el desarrollo de la investigación didáctica. Teniendo en cuenta que la investigación incluye aplicaciones de la proporcionalidad en geometría, se finaliza con algunas definiciones y teoremas de la semejanza de triángulos

6.1.1. El razonamiento Multiplicativo

El razonamiento multiplicativo (proporciones, tasas, porcentajes) es un factor clave en gran número de aplicaciones prácticas de la vida y en la aplicación de las competencias matemáticas. De todos los temas que se abordan en el currículo de matemáticas, este es uno de los más complejos matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar. Es una competencia determinante para poder seguir estudiando y profundizando tanto en matemáticas como en otras ciencias.

Los factores que se tendrán en cuenta en el razonamiento multiplicativo y el concepto de proporcionalidad son: los números racionales y las fracciones, razones y sus propiedades, proporciones, propiedades y teoremas de las proporciones.

La palabra fracción tiene varios significados: división de algo en dos partes, cada una de las partes separadas de un todo o consideradas como separadas, cada uno de los grupos de un partido u organización que difieren entre sí o del conjunto y que pueden llegar a independizarse, cada una de las partes en que se separa una mezcla sometida a ciertos procesos, expresión que indica una división y el número que expresa una o varias partes proporcionales de la unidad. Una fracción puede ser entendida como "trozo", "porción de un terreno", o como "una pequeña parte" (Torres, 2015 p. 40).

La fraccion y número racional no son sinonimos, la fraccion es un representante de un número racional. Los números racionales se pueden escribir en forma de fraccion, pero tambien se pueden expresar de otras maneras (como número decimal, por ejemplo). Algunas de las interpretaciones de número racional son: como parte de un todo, razón, cociente, operador y medida. Si se trabaja el significado del número racional con estos conceptos, la interpretacion de fraccion como comparación entre partes estaría a la par con las otras cuatro interpretaciones de numero racional. A continuación se presenta el siguiente cuadro con las cinco interpretaciones a ¾:

Tabla2.
Interpretaciones de Número Racional

INTERPRETACIONES DE 3/4	**SIGNIFICADO**	**ACTIVIDADES SELECCIONADAS PARA LA CLASE**
Comparaciones de parte-todo Con hacer paquetes de 3 partes a partir de 4 partes iguales.	¾ significa tomar 3 partes de las 4 partes en las que se puede dividir la unidad. Respecto a encontrar fracciones equivalentes, pensar en las partes en términos de pedazos mayores o menores:	Empaquetar[3] para encontrar fracciones equivalentes y comparar fracciones.

[3] Por empaquetar se entiende la habilidad para construir una unidad de referencia o una unidad entera con la que reinterpretar una situación. Dicho de otra manera, es fragmetar, agrupar o reestructurar una cantidad determinada en parcelas que tengan un tamaño mas manejable para trabajar con ellas.

	$\frac{3(pies\ enteros)}{4(pies\ enteros)} = \frac{12(cuartos\ de\ pies)}{16(cuartos\ de\ pies)} = \frac{1\frac{1}{2}(parejas\ de\ pies)}{2(parejas\ de\ pies)}$	
Medir “3 unidades de ¼ ”	¾ significa una distancia de 3 unidades de ¼ desde el 0 sobre une recta numérica, o 3 unidades de ¼ de cierta área dada.	Particiones sucesivas en los medidores de los contadores.
Operador “3/4 de algo”	¾ es una regla que nos dice cómo operar sobre una unidad (o sobre el resultado de una operación previa): multiplicar por 3 y dividir el resultado por 4, o dividir el resultado por 4 y luego multiplicar por 3. De aquí resultan significados multiplicativos para ¾: 3 unidades de ¼ , 1 unidad de ¾ y ¼ de 3 unidades.	Máquinas, papiroflexia, descuentos, fotocopiar, modelos de áreas para multiplicar y dividir.
Cociente “3 entre 4”	¾ es la cantidad que recibe cada persona cuando 4 personas se reparten 3 unidades de algo.	Partir, repartir.
Razones “3 de A se comparan con 4 de B”	3:4 es una relación en la cual se comparan 3 As con 4 Bs, en un sentido multiplicativo y no aditivo.	Actividades tipo bicolor

Fuente: El Conocimiento del Profesor de Matemáticas en la Práctica (Torres Eugenia, 2015)

La gran diferencia entre razones y las otras cuatro interpretaciones de los números racionales es el modo como se combinan a través de las operaciones aritméticas. Las otras cuatro interpretaciones son todas diferentes conceptualmente pero son indistinguibles una vez escritas simbólicamente: se suman, restan, multiplican y dividen según las mismas reglas. Sin embargo no se opera con las razones del mismo modo como se hace con las proporciones.

6.1.2. Razón.

Magnitud: se denomina magnitud a la cualidad de un objeto a la que se le puede asignar una medida. El tiempo, la masa, la temperatura o la longitud son ejemplos de magnitudes[4] (Daza, 2014 p. 37).

[4]Magnitud (Matemática): La magnitud es una medida asignada a cada uno de los objetos de un conjunto medible, formados por objetos matemáticos. La noción de magnitud concebida así puede abstraerse a objetos del mundo físico o propiedades físicas que son susceptibles de ser medidos.

Razón: Se denomina razón a cierta relación (usualmente de comparación) entre dos magnitudes. Las magnitudes pueden ser del mismo tipo, por ejemplo cuando se relacionan la diagonal de un cuadrado con su respectivo lado y se llaman magnitudes homogéneas; o de diferente tipo, cuando por ejemplo relacionamos el espacio recorrido y el tiempo utilizado por un móvil desde un cierto punto y se llaman magnitudes heterogéneas. La razón entre las magnitudes A y B se expresa de la forma A:B o $\frac{A}{B}$ y se lee A es a B (Daza, 2014 p. 37).

A y B se llaman términos de la razón. El primero (A) se llama antecedente y el segundo (B) consecuente.

Nota: con las definiciones anteriores, dado que toda magnitud por definición es medible con frecuencia confunden las magnitudes que se relacionan con sus respectivas medidas y por eso el problema del razonamiento proporcional termina siendo un problema de razonamiento entre números. Y como una razón numérica es una relación entre números usualmente se trata como el cociente entre ellos, lo cual a veces trae problemas como se expondrá más adelante (Daza, 2014 p. 39).

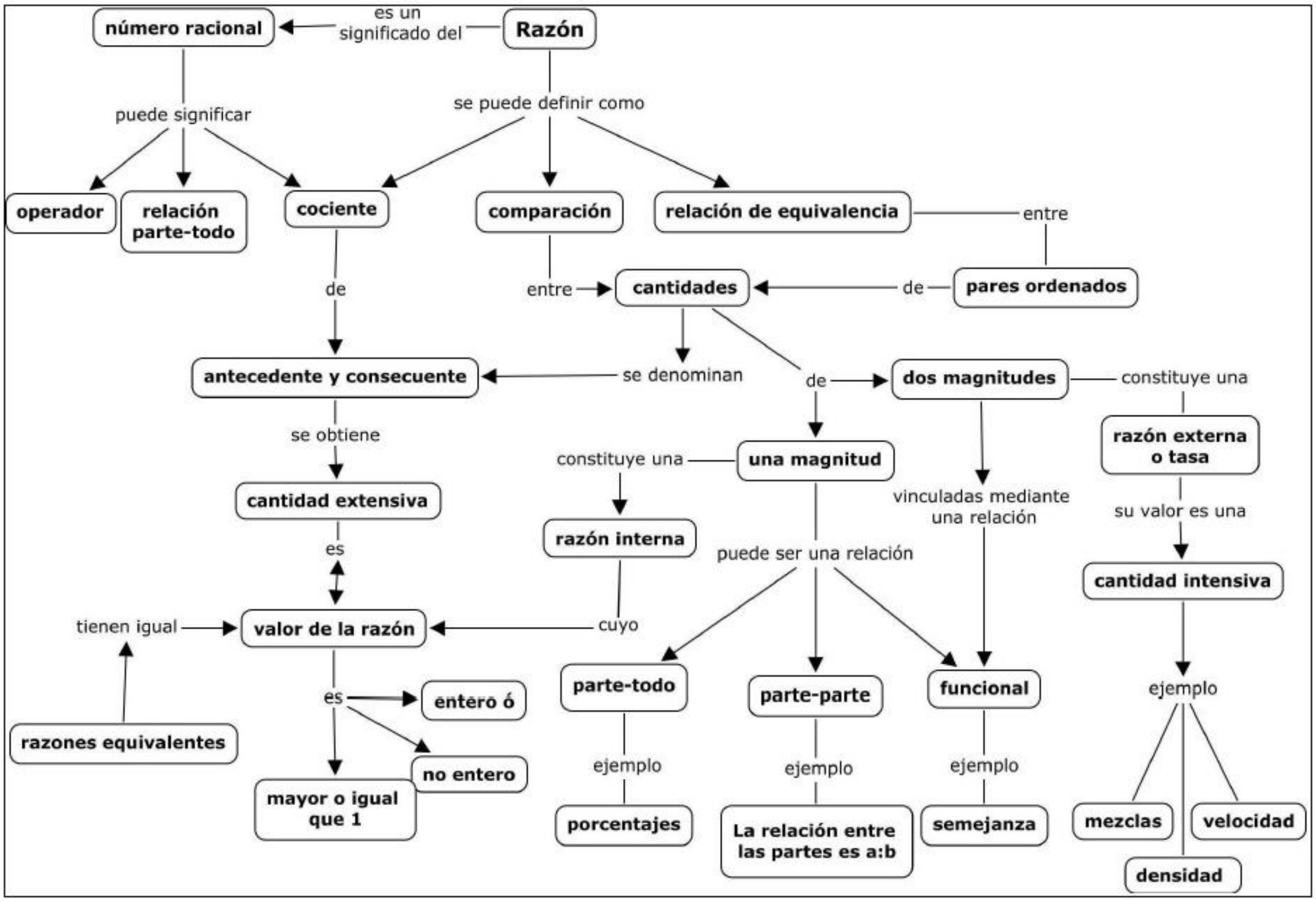


Gráfico 3. Mapa conceptual Razón: significados y usos (Valverde, 2012)

6.1.3. Propiedades de las Razones.

Se presenta a continuación algunas propiedades de las razones tomadas del libro (Mejía, 2009), se procura de ser cuidadosos con la notación establecida, con el fin de no presentar confusiones de la razón entre magnitudes y el cociente indicado que se puede expresar de dicha relación.

6.1.3.1. Propiedad: Sean A y B dos magnitudes, a las cuales por medio de un proceso de medida se les asignan los números n y m respectivamente, $n, m \in IR$. Así a la razón $A{:}B$ se le asigna la razón numérica $\frac{n}{m}$ · Es decir se establece una correspondencia que

$A{:}B \quad \rightarrow \quad \frac{n}{m} = k$, con $k \in IR$.

6.1.3.2. Propiedad: El valor de una razón no se altera, si el antecedente y el consecuente se multiplican o dividen por la misma cantidad k ($k \in IR$).

Esto es si $\frac{A}{B}$ es una razón y $k \in IR$ con $k \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} = \frac{kA}{kB} \cdot$ (Mejía, 2015 p. 14)

6.1.4. Proporción.

Proporción es la igualdad de dos razones; cuando dos razones son iguales se dice que las cuatro cantidades que las componen son proporcionales. Así: si *A, B, C y D* son magnitudes y se cumple que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, se dice que las magnitudes A y D son proporcionales. Evidentemente a las propiedades entre magnitudes se les puede hacer corresponder una respectiva propiedad entre números reales.

Esto es si a la razón $\frac{A}{B}$ se le asigna la razón entre números $\frac{n}{m}$ y a $\frac{C}{D}$ se le asigna la razón entre números $\frac{p}{q}$, con n, m, p y $q \in IR$, se tiene que: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, Entonces las cantidades n, m, p y q resultan proporcionales y los términos m y q se llaman extremos y n y p se llaman medios (Mejía, 2015 p. 26).

6.1.5. Propiedades y Teoremas de las Proporciones

A continuación se expondrán las propiedades más relevantes de las proporciones para el objetivo de este trabajo.

6.1.5.1. Propiedad fundamental: Si cuatro cantidades forman una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Efectivamente si a, b, c, y d son cantidades proporcionales, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y por propiedades de la estructura algebraica de los números reales se tiene que $ad=bc$.

Esta propiedad es de vital importancia en el desarrollo de la investigación, debido a que de esta se deduce que si se conocen tres términos cualesquiera de una proporción, puede encontrarse el cuarto. Por ejemplo sí 3, 6, 9 y x, forman la proporción $\frac{3}{6}=\frac{9}{x}$, el término x se puede hallar aplicando la propiedad anterior que nos lleva a que $3x=54$ y por lo tanto $x=\frac{54}{3}$. Luego $x=18$.

La propiedad anterior puede ser generalizada a dos secuencias de números positivos a, b, c,… y $a',',c',\ldots$ Si se cumple que $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\ldots.$ decimos que las dos **secuencias son proporcionales** y lo notaremos a,b,c,…∼ $a',b',c',\ldots$. (Mejía, 2015)

La razón constante $k=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\ldots.$ se llama **constante de proporcionalidad**. Nótese que la relación entre secuencias es una relación simétrica, pero la constante de proporcionalidad depende del orden en el que sean consideradas. Ya que la constante de proporcionalidad $k'=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots.$ es justamente el recíproco de k esto es $k'=\frac{1}{k}$

6.1.5.2. Definición: Varias cantidades están en **proporción continua** cuando la primera es a la segunda como la segunda es a la tercera, como la tercera es a la cuarta y así sucesivamente. Es decir, están en proporción continua si:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\ldots.$$

De esta propiedad se deduce que si tres cantidades forman una proporción continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ entonces $ac=b^2$. En este caso se dice que b es **media proporcional** entre a y c y c es **tercera proporcional** de a y b (Mejía, 2015 p. 27).

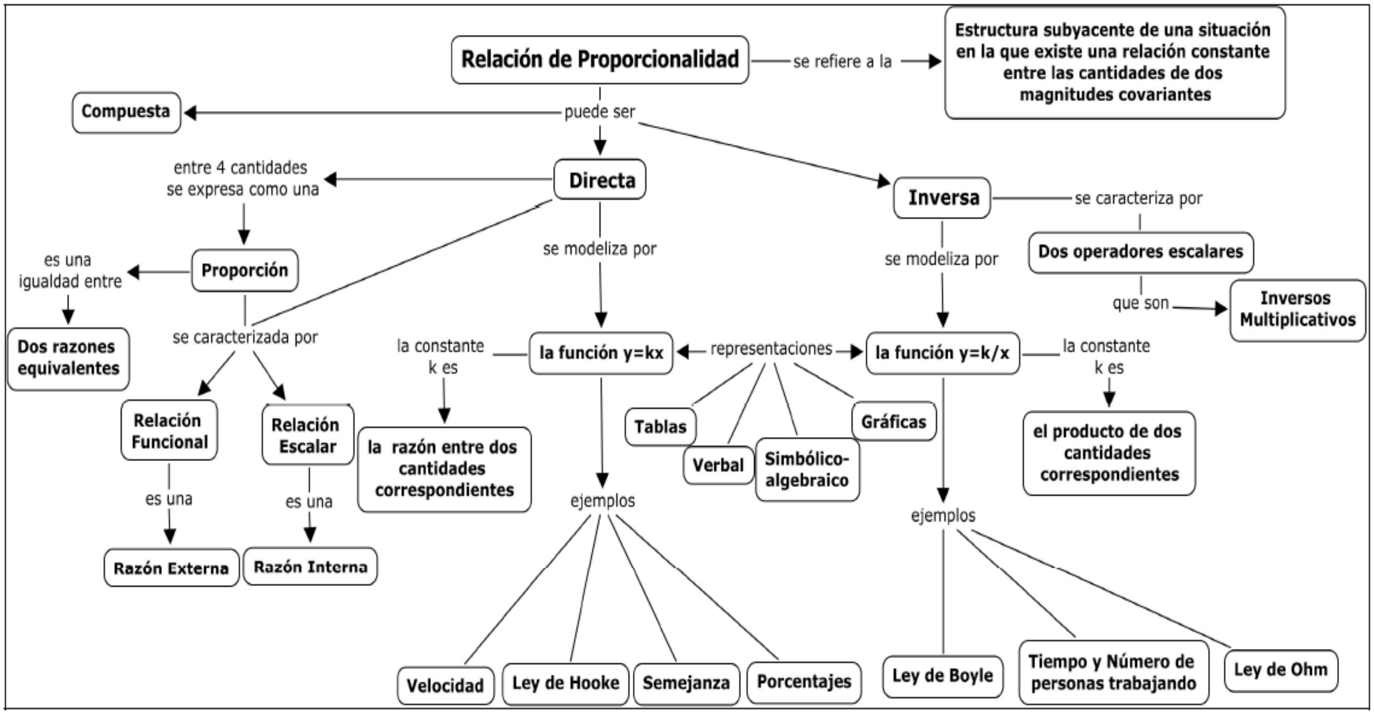


Gráfico 4. Mapa conceptual. Relación de Proporcionalidad: Caracterización y representaciones (Valverde, 2012)

6.1.5.3. Teorema 1: Si tres cantidades forman una proporción continúa, la razón de la primera a la tercera es igual a la razón de la primera a la segunda al cuadrado.

En otras palabras, si a, b y c son tres cantidades en proporción continúa entonces $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$ (Mejía, 2015 p. 27)·

Demostración: si a, b y c son tres cantidades en proporción continua entonces por definición se tiene que $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, pero como $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{b}\right)$, con c y $b\neq 0$, entonces $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)$, pero $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ por hipótesis, luego $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$ y por lo tanto $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$ ·

6.1.5.4. Teorema 2: Dadas dos proporciones diferentes se puede obtener una sola relacionada con las anteriores. En otras palabras:

Dadas las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ se tiene que $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$ (Mejía, 2015 p. 27)·

Demostración: Como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ multiplicando miembro a miembro se tiene $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{g}{h}\right)$ y por lo tanto $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}\cdot$

6.1.5.5. Corolario: Dadas las siguientes proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{b}{x}=\frac{d}{y}$ se deduce que $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$ ·

Demostración: Por el teorema anterior se tiene que $\frac{ab}{bx}=\frac{cd}{dy}$ y por lo tanto $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}\cdot$

6.1.5.6. Propiedad Invertendo.

Teorema 3: Dada una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ésta no varía si se invierte el antecedente y el consecuente de la primera razón, así como el antecedente y el consecuente de la segunda. La nueva proporción obtenida $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ se denomina **invertendo.**

Prueba: Evidentemente dada la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se tiene que $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ por las propiedades algebraicas de los números reales. Más precisamente si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; entonces $ad=bc$, luego por conmutatividad $da=cb$, por lo tanto por la propiedad fundamental se tiene que $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; y por propiedades de la igualdad $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (Mejía, 2015 p. 28)·

6.1.5.7. Propiedad Alternando

Teorema 4: Dada una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, esta no varía si se intercambian el consecuente de la primera razón con el antecedente de la segunda. La nueva proporción $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ obtenida se llama **alternando**.

Prueba: Dada $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $a=\frac{bc}{d}$ y por lo tanto $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (Mejía, 2015 p. 29).

6.1.5.8. Propiedad Componendo

Teorema 5: En una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente. En otras palabras si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ · Esta nueva proporción se denomina **componendo**.

Prueba: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ y por tanto $\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d}$ es decir $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ usando las propiedades algebraicas de los números reales (Mejía, 2015).

6.1.5.9. Propiedad dividendo

Teorema 6: En una proporción la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente como la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente. En otras palabras si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ · Esta nueva proporción obtenida se denomina **dividendo**.

Prueba: Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, usando un razonamiento análogo al de la propiedad anterior (Mejía, 2015 p. 29).

6.1.5.10. Propiedad componendo y dividendo

Teorema 7: En una proporción la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es la diferencia de los mismos, como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a la diferencia de los mismos. En otras palabras si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\cdot$ La nueva proporción obtenida se llama **componendo y dividendo**.

Prueba: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ aplicando los dos teoremas anteriores se tiene que

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (1)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad (2)$$

Al dividir la (1) por la (2) $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$ se obtiene $\frac{b(a+b)}{b(a-b)}=\frac{d(c+d)}{d(c-d)}$ y por lo tanto $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (Mejía, 2015 p. 30)·

6.1.6. Magnitudes Directamente Proporcionales

Sean A y B dos magnitudes que toman valores diferentes. Supongamos que A toma los valores a_1, a_2, $a_3,\ldots$, a_n y B los valores b_1, b_2, $b_3,\ldots$, b_n decimos que A y B son **directamente proporcionales**[5] si y solo si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=....=\frac{a_n}{b_n}$. Evidentemente si se cumple lo anterior, y $\frac{a_i}{b_i}=k$, $1\le i\le n$, $n\in\mathbb{N}$ y $k\in IR$ se tiene que $a_i=kb_i$ para todo i. Esto es, los valores que toma la magnitud A son iguales a los valores que toma la magnitud B multiplicados por una constante (Mejía, 2015 p. 36).

[5] Esta propiedad se expresa como si A varía proporcionalmente a B entonces A es igual a B multiplicada por una cantidad constante

Por ejemplo, supongamos que la magnitud A es el lado de un cuadrado y la magnitud B es su perímetro. Claramente A y B son directamente proporcionales pues para cualquier valor a de A (longitud del lado) se tiene que su perímetro p es $4a$. Igualmente sucedería si consideramos a B como la diagonal del cuadrado, pues sabemos que si tomamos un valor cualquiera d para la diagonal se tiene que $d = \sqrt{2}a$.

6.1.7. Magnitudes Inversamente Proporcionales

Una magnitud A que toma los valores a_1, a_2, $a_3,\ldots,a_n$ se dice **inversamente proporcional** a la magnitud B que toma los valores b_1, b_2, $b_3,\ldots,b_n$ cuando los valores de A son directamente proporcionales a los inversos multiplicativos de los valores de B[6]. En otras palabras $a_i = k.\frac{1}{b_i}$ siendo, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ y $k \in IR$.

Un ejemplo típico de proporción inversa se tiene cuando se relaciona para una obra el número de trabajadores necesarios, con respecto al tiempo que tardaría la obra en ser culminada (Mejía, 2015).

6.1.8. Regla de tres

La regla de tres o regla de tres simple es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres valores conocidos y una incógnita, estableciendo una relación de proporcionalidad entre todos ellos. Es decir, lo que se pretende con ella es hallar el cuarto término de una proporción conociendo los otros tres.

En la regla de tres simple, se establece la relación de proporcionalidad entre dos valores conocidos A y B, y conociendo un tercer valor **X**, se calcula un cuarto valor. **Y**,

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

[6] Una magnitud varía inversamente proporcional a otra cuando varía directamente proporcional a su recíproca. Es decir, A varía inversamente proporcional a B si se cumple que $A = k\left(\frac{1}{B}\right)$, de donde $A = \frac{k}{B}$.

La relación de proporcionalidad puede ser directa o inversa, será directa cuando a un mayor valor de **A** habrá un mayor valor de **B**, y será inversa, cuando se dé que, a un mayor valor de **A** corresponda un menor valor de **B**.

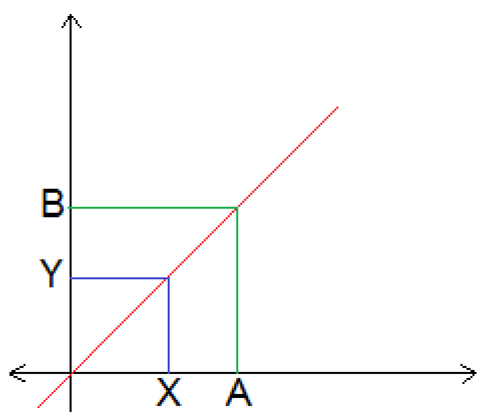
6.1.8.1. Regla de tres simple directa: La regla de tres simple directa se fundamenta en una relación de proporcionalidad, por lo que rápidamente se observa que:

$$\frac{B}{A} = \frac{Y}{X} = k$$

Donde **k** es la constante de proporcionalidad, para que esta proporcionalidad se cumpla se tiene que a un aumento de **A** le corresponde un aumento de **B** en la misma proporción, el cual se puede representar:

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ X \rightarrow Y \end{array}\right\} \rightarrow Y = \frac{BX}{A}$$

y se dice que: **A** es a **B** directamente, como **X** es a **Y**, siendo **Y** igual al producto de **B** por **X** dividido entre **A**.



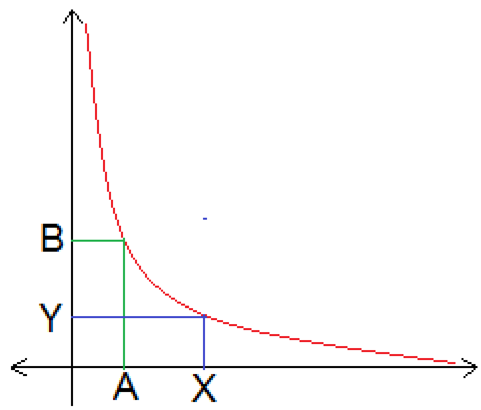
6.1.8.2. Regla de tres simple inversa: En la regla de tres simple inversa, en la relación entre los valores se cumple que:

$$A.B = X.Y = e$$

donde **e** es un producto constante, para que esta constante se conserve, se tiene que un aumento de **A**, necesitara una disminución de **B**, para que su producto permanezca constante, se representa la regla de tres simple inversa como:

$$\left.\begin{matrix} A \to B \\ X \to Y \end{matrix}\right\} \to Y = \frac{AB}{X}$$

y se dice que: **A** es a **B** inversamente, como **X** es a **Y**, siendo **Y** igual al producto de **A** por **B** dividido por **X**.



6.1.9. Proporcionalidad Geométrica

Como se ha mencionado anteriormente la proporcionalidad surge de la necesidad del ser humano de resolver problemas cotidianos de su entorno, los cuales con frecuencia son modelados geométricamente. En este trabajo se encontrarán algunos problemas clásicos los cuales se desarrollan a partir de un pensamiento geométrico y métrico y por tal motivo se hace necesario establecer explícitamente el uso de la teoría de las proporciones en geometría para hallar **figuras semejantes**, como es el caso de triángulos semejantes o en general de polígonos semejantes. Es interesante destacar algunos de los teoremas más relevantes para nuestros objetivos en función de sus aplicaciones. Por lo anterior se limitará a enunciarlos siguiendo el estilo de Euclides en sus *Elementos*, esto es dar un enunciado general en lenguaje ordinario realizar la figura correspondiente y enunciar de nuevo el teorema a partir de la figura dada (Daza, 2014, p. 43).

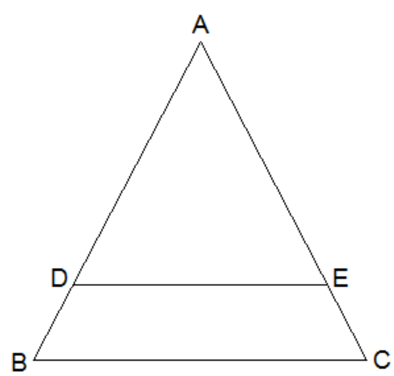
6.1.9.1. Segmentos proporcionales. Se entiende por razón de dos segmentos A y B a la razón de los números que expresan las longitudes de estos segmentos, cuando han sido medidos con la misma unidad. Es decir

$$A{:}B = \frac{a}{b}\cdot$$

Dos segmentos son proporcionales cuando la razón entre las dos primeras es igual a la razón de las otras dos. Más precisamente: si A, B, C y D son cuatro segmentos cuyas longitudes están dadas por los números a, b, y d, decimos que A y D son proporcionales, esto es $A{:}B :: C{:}D$ si solo si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\cdot$

Como con frecuencia los lados de una figura geométrica rectilínea se notan con las letras mayúsculas que marcan sus extremos, por ejemplo AB, en este trabajo seguiremos una notación bastante convencional con la cual $\overline{AB}$ se refiere al segmento propiamente dicho y AB a la medida de este segmento. Las dos notaciones serán usadas según conveniencia en lo que sigue (Daza, 2014, p. 44).

6.1.9.2. Teorema 8: Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales.



En otras palabras, sea el triángulo $\triangle ABC$ y D, E puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ entonces se tiene que $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$.

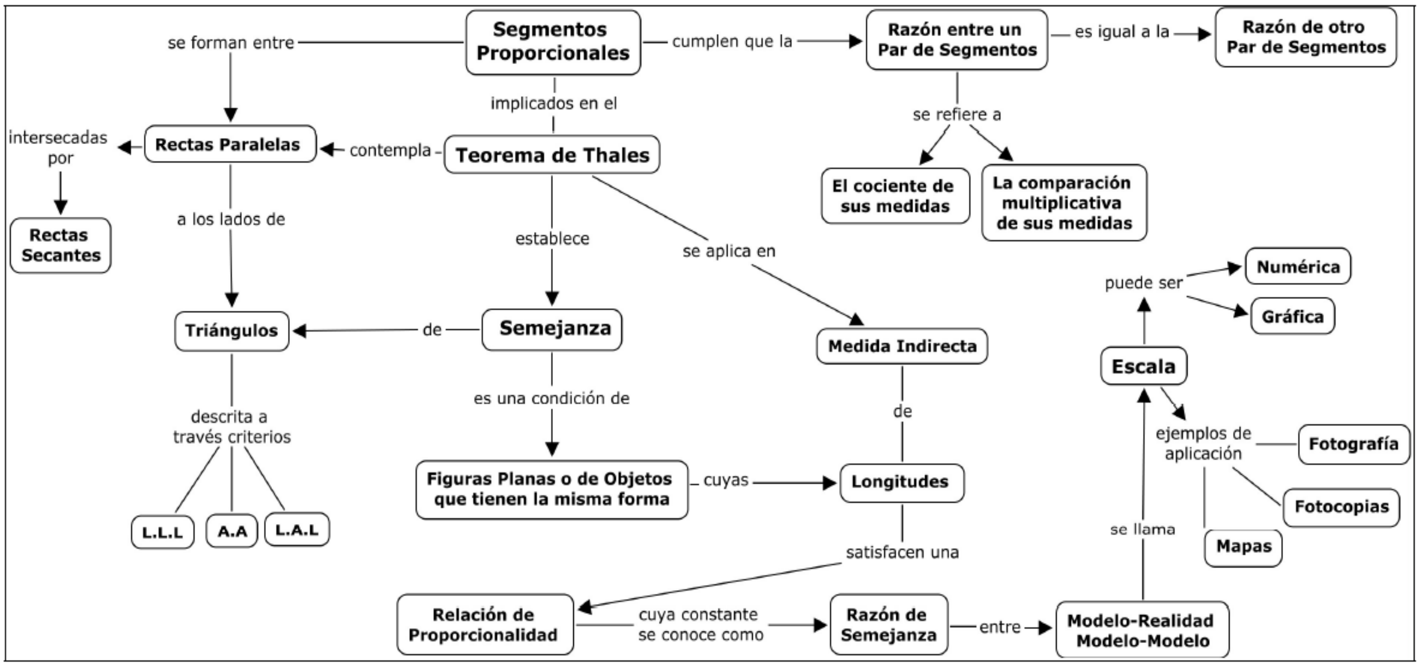
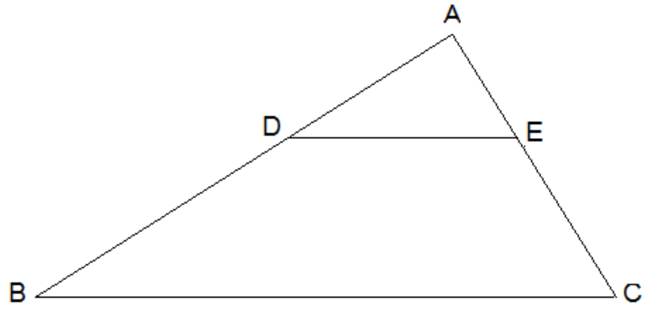


Gráfico 5. Mapa conceptual Proporcionalidad Geométrica (Valverde, 2012)

6.1.9.3. Teorema 9: Toda recta que determina sobre dos lados de un triángulo segmentos proporcionales es paralela al tercer lado.

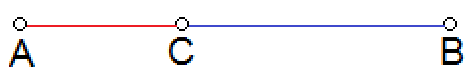


Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sean los puntos D y E puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si se cumple que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$ entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}\cdot$ Ciertamente el teorema 9 es el recíproco del teorema 8 (Daza, 2014, p. 45).

6.1.9.4. Media proporcional: dados los segmentos $\overline{XY}, \overline{AB}, y\, \overline{CD}$ se dice que $\overline{XY}$ es media proporcional entre $\overline{AB}, y\, \overline{CD}$ si $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{CD}}$. Si además consideramos que sus respectivas mediadas son h, y n tenemos la respectiva igualdad numérica $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$ lo cual implica que $h^2 = mn$, luego $h = \sqrt{mn}$.

Cada uno de los otros segmento $\overline{AB}, y\, \overline{CD}$ se llaman tercera proporcional.

6.1.9.5. Proporción áurea: Un caso particular de una media proporcional se tiene cuando un segmento $\overline{AB}$ se divide en proporción áurea[7] y un punto C sobre el segmento, este divide al segmento inicial de tal forma que el segmento inicial $\overline{AB}$ sea a la parte mayor $\overline{CB}$ como la parte mayor $\overline{CB}$ es a la parte menor $\overline{AC}$, es decir $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$.



Ahora bien, si consideramos AC=a y BC=b tenemos $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}\cdot$ Luego por la propiedad fundamental de las proporciones tenemos que $(a+b)=b^2$ es decir

[7] La proporción áurea, razón áurea o divina proporción: es una proporción basada en la división de un segmento en su "razón extrema y media". Un segmento se dice que está dividido en su razón extrema y media cuando el total del segmento es a la parte mayor como la parte mayor a la menor.

$b=\sqrt{a(a+b)}$ y si en particular AB=1, se tiene que $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$, es decir, $1-x=x^2$ y por lo tanto $x^2+x-1=0$, de donde $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$, luego $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

El valor de x es conocido como el número áureo φ y tiene múltiples aplicaciones en diferentes campos como la arquitectura, la música y el arte.

6.1.9.6. Polígonos semejantes: Se llaman polígonos semejantes a los polígonos que tienen los ángulos respectivamente congruentes y los lados correspondientes proporcionales[8].

Los lados correspondientes en figuras semejantes son aquellos adyacentes a los ángulos respectivamente congruentes.

En los **triángulos semejantes**, generalmente se llaman lados correspondientes a los lados opuestos a los ángulos congruentes.

Se llama **razón de semejanza**, el número que expresa la razón de los lados correspondientes (Daza, 2014, p. 46).

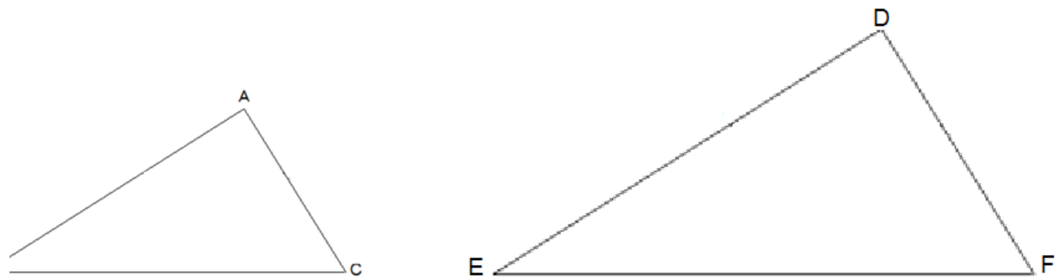
6.1.9.7. Triángulos semejantes: dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$, satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \measuredangle A \cong \measuredangle A';\ \measuredangle B \cong \measuredangle B';\ \measuredangle C \cong \measuredangle C' \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \end{cases}$$

6.1.9.8. Criterios de semejanza de triángulos

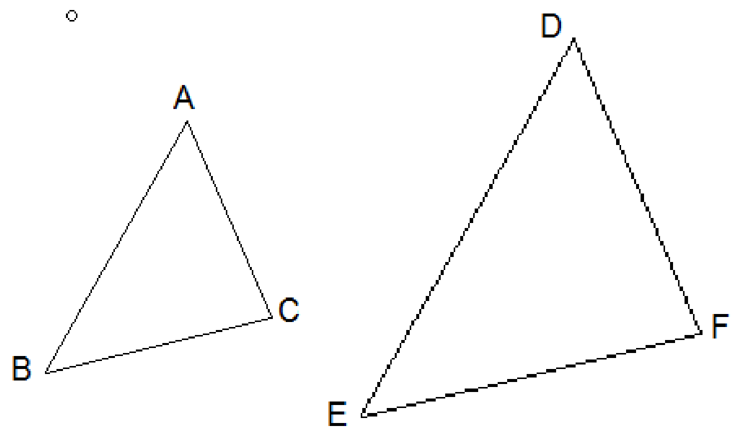
Criterio Ángulo - Ángulo (A-A): Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de un segundo triángulo, entonces estos dos triángulos son semejantes.

[8] Todos los polígonos regulares que tienen el mismo número de lados son semejantes.



En otras palabras, dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ y $\sphericalangle B \cong \sphericalangle E$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

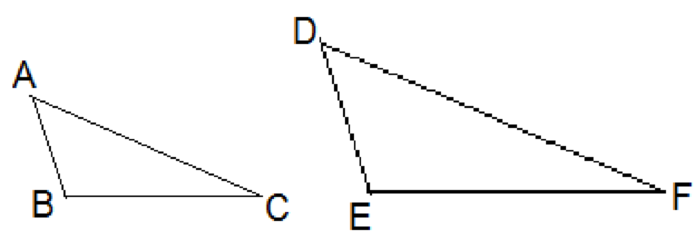
Criterio Lado – Ángulo – Lado (L-A-L): Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados respectivamente proporcionales.



En otras palabras dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\sphericalangle A \cong \sphericalangle D$ y $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$,

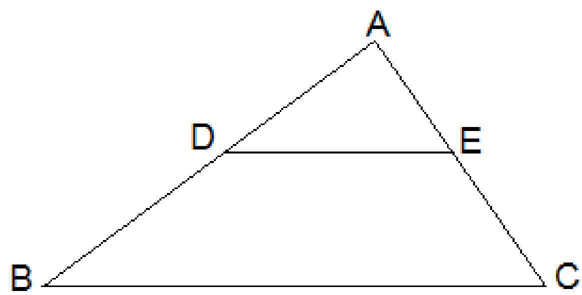
entonces**:** $\triangle ABC \sim \triangle$.

Criterio Lado – Lado – Lado (L-L-L): Dos triángulos son semejantes, cuando tienen los tres lados respectivamente proporcionales.



Es decir, dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (Daza, 2014, p. 48).

6.1.9.9. Teorema de Thales: Toda paralela al lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.



En otras palabras dado el triángulo $\triangle ABC$ y los puntos D y E puntos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, si $\overline{DE} \parallel \overline{BE}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ y por lo tanto $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

6.2. Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas es una de las teorías de la Matemática Educativa y surge de la necesidad de disponer de un modelo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas en el que se encuentren debidamente representadas todas las relaciones y las operaciones que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, también hay una inquietud por hacer extensiva esta nueva propuesta a todos los profesores, y que experimenten la vivencia de la puesta en escena de situaciones didácticas en un ambiente propicio de trabajo para poder reconocer con esto que es un instrumento valioso para la enseñanza de las matemáticas y para su propia formación.

El modelo propone, que la enseñanza es un proceso centrado en la producción de conocimientos matemáticos en el ámbito escolar, que implica establecer nuevas relaciones, como transformar y reorganizar, además implica validar el conocimiento de acuerdo a las normas y los procedimientos aceptados por la comunidad matemática, así como concebir la clase como un ámbito de producción, respeto del aprendizaje, de la enseñanza, del conocimiento matemático, de la relación entre el conocimiento matemático que habita en la escuela; donde los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen de las matemáticas, e incluso desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica, (Brousseau, 1998). Aquí Brousseau, plantea que la situación didáctica es uno de los elementos que propician la relación del maestro con el alumno.

Al referirnos a las *Situaciones Didácticas*, en principio debemos distinguir dos enfoques: uno, tradicional; otro, el enfoque planteado por la teoría de Brousseau. Ambos en relación a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el primero, tendríamos una relación estudiante-profesor, en la cual, el profesor simplemente provee (o deposita) los contenidos, instruye al estudiante, quien captura (o engulle) dichos conceptos y los reproduce tal cual le han sido administrados (Chavarría, 2006 p. 2)

Dentro de este enfoque no se contextualiza el conocimiento, no se tiene un aprendizaje significativo. Paulo Freire apunta con respecto al enfoque tradicional: “La educación padece de la enfermedad de la narración que convierte a los alumnos en contenedores que deben ser llenados por el profesor, y cuanto mayor sea la docilidad del receptáculo para ser llenado, mejores alumnos serán”. Esto con respecto al enfoque tradicional.

Ahora bien, en el enfoque planteado por Brousseau intervienen tres elementos fundamentales: estudiante, profesor y el medio didáctico[9]. En esta terna, el profesor es quien facilita el medio en el cual el estudiante construye su conocimiento. Así, *Situación Didáctica* se refiere al conjunto de **interrelaciones** entre tres sujetos: profesor-estudiante-medio didáctico. Dentro de esta dinámica tenemos otra dimensión: la *Situación A-didáctica*; la cual, vamos a estudiar dentro del haz de interrelaciones planteado en la *Situación* Didáctica (Chavarría, 2006 p. 2).

6.2.1. Relación: Situación Didáctica / Situación a-didáctica

6.2.1.1. Situación A-Didáctica: La *Situación A- Didáctica* es el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro-comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (Chavarría, 2006 p.2).

6.2.1.2. Situación Didáctica: La *Situación Didáctica*, por otra parte, comprende el proceso en el cual el docente **proporciona el medio didáctico en donde el estudiante construye su conocimiento**. De lo anterior se deduce que la situación didáctica engloba las situaciones a-didácticas, de esta forma, *Situación Didáctica* consiste en la interrelación de los tres sujetos que la componen. En resumen, la interacción entre los sujetos de la Situación Didáctica acontece en el medio didáctico que el docente elaboró para que se lleve a cabo la construcción del conocimiento (*situación didáctica*) y pueda

[9] Este constituye el espacio donde se desenvuelven los elementos. El medio no representa por ello una dimensión pasiva, sino que es "sujeto" dentro de las situaciones didácticas.

el estudiante, a su vez, afrontar aquellos problemas inscritos en esta dinámica sin la participación del docente (*situación a-didáctica*)[10] (Chavarría, 2006 p.2).

6.2.2. El Contrato Didáctico.

Brousseau plantea la S*ituaciones Didácticas* como una forma para "modelar" el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera tal que este proceso se visualiza como un juego para el cual el docente y el estudiante han definido o establecido reglas y acciones implícitas. Dentro de la interrelación: profesor-estudiante-medio didáctico, hay dos conceptos que vienen a integrarse: la transposición didáctica y el contrato didáctico.

El Contrato Didáctico se refiere a la consigna establecida entre profesor y alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente. Por ejemplo, un contrato didáctico consiste en impartir lecciones de una manera sistemática[11], donde el estudiante recibe los conceptos y repite los procedimientos. El rechazo a la reelaboración de este contrato consiste en el temor a salirse del conjunto de reglas ya establecidas para el profesor y el estudiante. Es decir, las reglas ya están definidas y es cómodo, tanto para el docente como para el estudiante, trabajar bajo esta consigna, en la cual no acontece una construcción del conocimiento sino un "suministro bancario" de conocimientos: depósito por parte del profesor / repetición por parte del estudiante (Chavarría, 2006 p. 3).

6.2.3. Efectos que Acontecen en la Situación Didáctica

Dentro de las interacciones que acontecen en la *Situación Didáctica*, Brousseau identifica algunos *efectos* que pueden inhibir o interrumpir la construcción de conocimiento que lleva a cabo el estudiante dentro del medio didáctico que el profesor elabora. Básicamente, son actitudes que generan efectos negativos en el proceso enseñanza-

---

[10] El docente debe estar atento a que el medio didáctico reúna las condiciones óptimas de modo que el estudiante pueda elaborar su conocimiento, el cual validará en una Situación A-Didáctica *a posteriori.* Así el medio es para él su lugar de sobrevivencia.

[11] Se alude a casos donde simplemente se sigue un libro de texto, o un conjunto de ejercicios que no son renovados, ni llevados al contexto de los estudiantes.

aprendizaje, o bien, en la definición del Contrato Didáctico. Brousseau indica cuatro efectos reseñados en (Chavarría, 2006 p.3):

6.2.3.1. Efecto Topaze: Brousseau lo identifica como aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. Éste último ve las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con ello no permite la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes[12].

6.2.3.2. Efecto Jourdain: Consiste en la actitud que toma el profesor cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que "está bien", que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido[13].

6.2.3.3. Deslizamiento Meta-Cognitivo: Consiste en la actitud de tomar una heurística en la resolución de un problema y asumirla como el objeto de estudio. Bien se podría ejemplificar con el uso de diagramas de Venn en la teoría de conjuntos. Cuando se comenzaron a analizar los diagramas de Venn dejamos de lado lo que es la teoría de conjuntos, pues se tomaron los primeros como la teoría en sí misma. Ese es un deslizamiento meta cognitivo.

6.2.3.4. Uso Abusivo de la Analogía: Sabemos que en la resolución de problemas es importante el uso de la analogía pero no funciona suplantar el estudio de una noción compleja por un caso análogo. No nos podemos quedar con los problemas análogos,

[12] Si a un estudiante se le solicita demostrar el teorema de Pitágoras y se le efectúa la pregunta ¿por qué no utiliza este resultado? Al final si el estudiante llega a la solución del problema, no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor le dijo cuál era el camino que debía seguir. Entonces ahí más bien fue el profesor es el que asumió la resolución del problema y no tanto el estudiante".

[13] Un ejemplo proporcionado por Brousseau: un docente dio unas botellas con yogurt a un grupo de estudiantes y quería que dedujeran de ahí el grupo de Klein, entonces los alumnos lo que hicieron fue dar características de la botella. Y el docente decía que esa era básicamente la definición o propiedades de la botella de Klein y en realidad nada tenía que ver con el problema original (Chavarría, 2006 p.3).

sino que debemos devolvernos al problema original. De lo contrario, incurrimos en el uso abusivo de la analogía.

6.2.4. Tipos de Situaciones Didácticas

La teoría de Brousseau plantea una tipología de situaciones didácticas. Cada una de ellas debería desembocar en una situación a-didáctica, es decir, en un proceso de confrontación del estudiante ante un problema dado, en el cual construirá su conocimiento. Como se plantean en (Chavarría, 2006 p.4) dentro de las situaciones didácticas se tienen:

6.2.4.1. La situación acción: consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos.

Dentro de las condiciones que una *situación acción* debería reunir para desembocar en una situación a-didáctica tenemos, por ejemplo, la formulación del problema: éste debe ser del interés del estudiante, además el tipo de pregunta formulada debe ser tal que no tenga respuesta inmediata, de modo que represente realmente un problema para el estudiante.

Este comportamiento debe darse sin la intervención del docente; pero, si bien el proceso se lleva a cabo sin la intervención del docente, no implica que éste se aísle del proceso. Pues es el docente quien prepara el medio didáctico, plantea los problemas y enfrenta al estudiante a ese medio didáctico.

6.2.4.2. La situación de formulación: consiste en un trabajo en grupo, donde se requiere la comunicación de los estudiantes, compartir experiencias en la construcción del conocimiento. Por lo que en este proceso es importante el control de la comunicación de las ideas.

La situación de formulación es básicamente enfrentar a un grupo de estudiantes con un problema dado. En ese sentido hay un elemento que menciona Brousseau, esto es, la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso, es decir, que todos se vean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.

6.2.4.3. La situación de validación: donde, una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se discute con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.

6.2.4.4. Fase de institucionalización: a pesar de no constituir una situación a-didáctica, la institucionalización del saber, representa una actividad de suma importancia en el cierre de una situación didáctica**.** En ésta los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas. Es presentar los resultados, presentar todo en orden, y todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento (situaciones didácticas anteriores)

FASES DE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

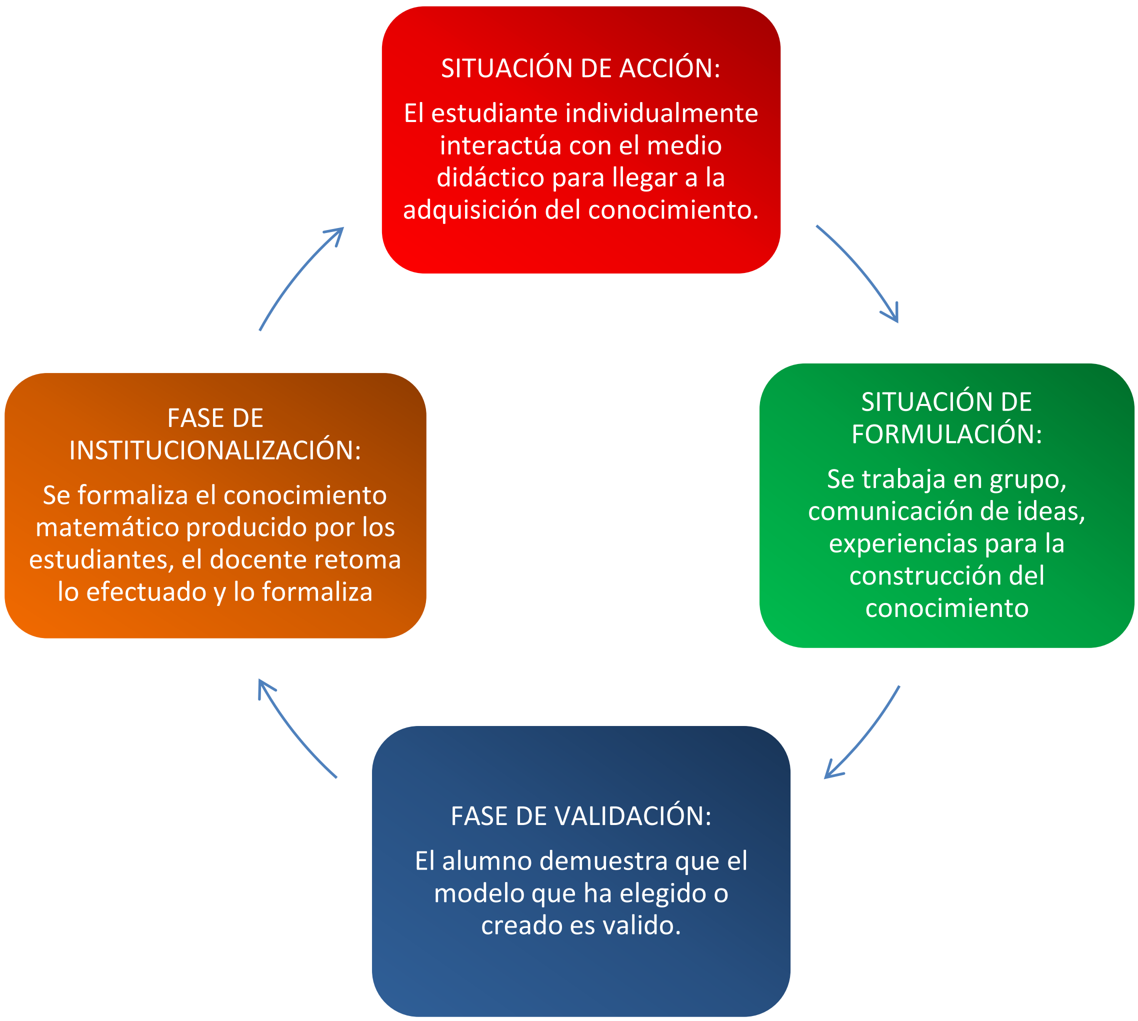


Diagrama 1. Fases de la Teoría de la Situación Didáctica
Elaboración propia a partir de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986)

7. METODOLOGÍA

El trabajo realizado es un estudio cualitativo, cuantitativo e interpretativo, en cuanto permite obtener información de cómo los estudiantes llegan a la comprensión del concepto de proporcionalidad, de igual forma permite describir las actividades de enseñanza y aprendizaje que se realizan en algunas situaciones que hacen parte de la secuencia didáctica, sobre las intervenciones que el docente realiza en dicha secuencia, las nociones y conceptos matemáticos, las aplicaciones de acuerdo al contexto de los alumnos, las interacciones intencionadas por parte del docente y un trabajo estadístico que permita analizar las respuestas de los estudiantes en cada uno de los ítems de las secuencias didácticas.

El diseño metodológico de esta investigación se apoya en la Ingeniería Didáctica, que se sustenta en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. La noción de ingeniería didáctica surgió en la didáctica de la matemática Francesa, a principios de la década de los 80. Se usó este término por analogía con la forma de trabajo didáctico de un ingeniero. (Douady, 1995 p. 62), comentan al respecto:

> Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.

La ingeniería didáctica desarrollada en el área de Educación Matemática es utilizada como metodología de investigación específica y como método de producción de situaciones de enseñanza y aprendizaje. Se utilizará la ingeniería didáctica como metodología de investigación, por ser un esquema experimental basado en realizaciones didácticas en el aula, es decir, analiza los procesos de construcción, realización y análisis; y para validar las secuencias de enseñanza, se hará una comparación entre lo que se esperaba y lo que realmente sucedió durante el desarrollo de la clase (Figueroa, 2013 p. 26).

7.1. Fases de la ingeniería didáctica

El proceso de investigación Según (Artigue, 1995) consta de cuatro fases:

- Análisis preliminar.
- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori y validación.

7.1.1. Fase 1: Análisis Preliminar

Tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis preliminares están constituidos por un conjunto de análisis en relación al objeto matemático: la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se va situar la realización didáctica efectiva teniendo en cuenta los objetivos de la investigación.

El análisis de esta fase es necesario hacerlo bajo tres dimensiones: (Douady, 1995)

Epistemológica: Aquí se analizará las características del saber en juego, una reseña histórica y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio.

Cognitiva: Aquí se analizan las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Se analizará la forma como los alumnos interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.

Didáctica: Aquí se analizará las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Se analizará la forma cómo se desarrolla el proceso de enseñanza del objeto matemático, así como los recursos didácticos (libros, guías, etc.) que utilizan los profesores donde se está realizando el estudio.

7.1.2. Fase 2: La concepción y el análisis a priori

El investigador toma la decisión de trabajar con un determinado número de variables del sistema, no fijadas por las restricciones llamados variables de comando. (Douady, 1995) considera dos tipos de variables de comando:

- Las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local de la ingeniería, es decir la organización de una secuencia o fase.

Esta fase, tiene dos objetivos: El primero, concerniente a la concepción, que es diseñar situaciones o actividades que ayuden a analizar los procesos de construcción y comunicación del saber. Además, para la construcción de las actividades debe tener en cuenta lo siguiente:

- En un primer momento, los alumnos deben tener estrategias de solución que les permitan abordar el problema con sus conocimientos disponibles.
- Las actividades deben ser diseñadas teniendo en cuenta los resultados de estudios previos.

El segundo objetivo, concerniente al análisis a priori, que es señalar cómo la manipulación de las variables didácticas permitirá controlar los comportamientos de los alumnos antes de la experimentación. Se debe considerar dos aspectos: el análisis matemático y el análisis didáctico del objeto matemático, y para ello debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Los resultados que se esperan de los alumnos.
- Planificar las intervenciones del profesor.
- Identificar las variables del estudio.
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar en la resolución de las actividades.

7.1.3. Fase 3: Experimentación

Esta fase es la puesta en marcha de las actividades diseñadas. Inicia en el momento en que el investigador, profesor y observador entra en contacto con la población de estudiantes. (De Faria, 2006), señala que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Si la experimentación se lleva a cabo en más de una sesión, se recomienda hacer un análisis a posteriori parcial, para realizar las correcciones necesarias y continuar con la siguiente sesión de clase.

7.1.4. Fase 4: Análisis a posteriori y validación

El análisis a posteriori está constituido por el conjunto de datos recogidos durante la realización didáctica (experimentación), como son las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella y la frecuencia de ciertas actitudes. Estos datos se complementan con la utilización de metodologías externas, como cuestionarios y entrevistas aplicadas en distintos momentos de la enseñanza.

En cuanto a la validación, (Douady, 1995) sostiene: *"la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación"*. Esta comparación es entre los comportamientos esperados, con los que sucedieron realmente durante la clase.

A continuación se presenta un esquema de las actividades a desarrollar en cada una de las fases y como se relaciona con los objetivos de esta investigación.

Tabla 3.

Fases del Diseño Metodológico según la Metodología de la Ingeniería Didáctica

FASE	***OBJETIVO***	***ACTIVIDADES***
Fase 1 **Análisis preliminar**	Conocer los aspectos históricos - epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad.	Elaborar una revisión bibliográfica sobre metodologías didácticas para la enseñanza-aprendizaje del concepto de proporcionalidad aritmética y geométrica. Revisión bibliográfica de las principales dificultades y obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad. Análisis de las fortalezas y debilidades de los estudiantes respecto al aprendizaje del concepto de proporcionalidad.
Fase 2 **Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería**	Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven actividades que involucran los conceptos de razón, proporción, y proporcionalidad aritmética y geométrica	Diseño, construcción y desarrollo de una situación a-didáctica con los estudiantes a partir de actividades y problemas del entorno sobre los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. Análisis de los resultados de los estudiantes desarrollada la situación a-didáctica, para detectar las principales dificultades en la solución de las actividades y problemas sobre el concepto de proporcionalidad.
Fase 3	Analizar la comprensión de los conceptos de razón,	Elaboración de pautas de trabajo, donde el estudiante debe aplicar los conceptos de

Experimentación	proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica que logran los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, mediante actividades y problemas de su entorno.	razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica para resolver actividades y problemas del entorno. Análisis de la comprensión alcanzada por los estudiantes al desarrollar las situaciones didácticas propuestas.
Fase 4 **Análisis a posteriori y validación**	Validar el nivel de aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica logrado por los estudiantes, mediante la confrontación del análisis a priori y posteriori.	Evaluar el desempeño alcanzado durante la implementación de la estrategia didáctica desde el aspecto curricular. Análisis de los datos recogidos a lo largo de la experimentación, (observaciones de las secuencias de enseñanza, producciones de los estudiantes dentro y fuera de la clase). Evaluar el grado de motivación de los estudiantes en la comprensión de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica, por medio de la estrategia planteada en este trabajo de investigación. Confrontación del análisis a priori y posteriori de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes, con respecto al concepto de proporcionalidad.

Fuente: Aprendizaje del Concepto de función. (Campeón, 2015)

8. ANÁLISIS PRELIMINAR

En este capítulo se analiza cada uno de los elementos del sistema didáctico, el saber matemático (razones, proporciones, proporcionalidad), la situación de enseñanza, el estudiante, así como las relaciones existentes entre ellos; este análisis se efectúa en las dimensiones epistemológica, didáctica y cognitiva de la siguiente manera:

1. Análisis epistemológico: Se hace una revisión de los fundamentos históricos y teóricos del objeto (razón, proporción, proporcionalidad) a través de una revisión de diferentes investigaciones para observar cómo se presenta el concepto de proporcionalidad, cuál es su definición, propiedades y utilidades. También se analiza cuáles son las principales interpretaciones ligadas a la noción de razón, proporción y proporcionalidad.

2. Análisis didáctico: Asociada a cómo se ha enseñado este objeto matemático a los estudiantes del colegio Rafael Uribe Uribe, cómo se presenta el contenido, si es solo teórico, presenta ejercicios de simple cálculo o trabajan en función a situaciones planteadas; apoyándonos en las respuestas a las entrevistas que se hace a los estudiantes.

3. Análisis cognitivo: Analizar las falencias que presentan los estudiantes en el desarrollo de problemas sobre razón, proporción y proporcionalidad según diversas investigaciones al respecto y luego haciendo uso de cuestionario "Exploración de conocimientos" se analizará los conceptos previos que nuestros estudiantes tienen antes de presentarles las situaciones diseñadas.

8.1. ANÁLISIS COGNITIVO

Con la finalidad de poder analizar los procesos cognitivos, se ha diseñado y aplicado una actividad de conocimientos previos a los alumnos de octavo y noveno grado del colegio Rafael Uribe Uribe, donde se ha considerado conocimientos y habilidades que el alumno debe manejar para el aprendizaje del objeto matemático (Razón, proporción, proporcionalidad aritmética y geométrica).

La actividad inicial se aplicó a dos grupos de los grados octavo y noveno con la intención de lograr un análisis de las características cognitivas de los estudiantes, se evaluaron los conocimientos previos que fundamentan el concepto de razón, proporción y proporcionalidad y desarrollar actividades que se propongan en la secuencia didáctica.

Los conocimientos de los estudiantes se verificaron por medio de una actividad de exploración (ver Anexo 1), a partir de los datos de esta prueba se realiza un análisis de los conocimientos, falencias, errores y dificultades que presentan los estudiantes al resolver problemas relacionados con razón, proporción y proporcionalidad.

Tabla 4:
Conocimientos previos a evaluar

CONOCIMIENTOS PREVIOS	**NÚMERO DE ÍTEM EN LA PRUEBA**
1. Conocer y aplicar el concepto de razón	Ítem 1
2. Conocer y aplicar la propiedad de las proporciones	Ítem 2
3. Conocer y aplicar el concepto de magnitudes directamente proporcionales.	Ítem 3
4. Conocer y aplicar porcentajes	Ítem 4
5. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad directa	Ítem 5
6. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad inversa	Ítem 6
7. Conocer y aplicar la relación entre segmentos	Ítem 7

8. Conocer y aplicar criterios de semejanza de triángulos	Ítem 8
9. Conocer y aplicar el teorema de Thales	Ítem 9

Fuente: Elaboración propia

La actividad de exploración de conocimientos se realizó a 15 estudiantes de los grados octavo y noveno. En la siguiente tabla se describen los resultados de la siguiente manera: Cantidad de alumnos que llegaron a la respuesta correcta (**Correcto**), los que no llegaron a la respuesta correcta (**Incorrecto**), los que se quedaron planteando la situación (**En proceso**), y los que no contestaron la pregunta (**En blanco**).

A continuación se presentan las respuestas por alumno de cada una de las preguntas realizadas (Tabla 5) y el resultado general (Tabla 6):

Tabla 5.

Resultado calificación individual de la actividad de exploración grados 8-9

ESTUDIANTES	PREGUNTAS										
G8	**1a**	**1b**	**2**	**3a**	**3b**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
E1	I	P	I	C	B	C	C	I	B	B	B
E2	I	P	C	P	B	I	C	I	I	I	P
E3	I	B	I	P	C	I	C	I	I	I	I
E4	I	P	I	C	B	C	P	I	B	B	I
E5	C	C	C	C	C	C	C	I	C	P	C
E6	B	I	C	I	B	C	I	I	I	I	B
E7	I	I	C	I	B	C	I	I	I	I	B
G9											
E8	C	C	C	I	C	C	C	I	C	I	C
E9	P	B	I	P	C	I	C	I	I	I	P
E10	C	C	C	P	C	C	C	I	C	P	I
E11	P	P	I	C	I	I	I	I	B	B	B
E12	P	B	I	P	C	I	C	I	I	I	I

E13	P	P	I	P	C	P	C	I	I	C	I
E14	I	P	C	I	B	C	C	I	P	I	B
E15	I	C	C	C	C	C	C	I	P	I	B

Tabla 6.

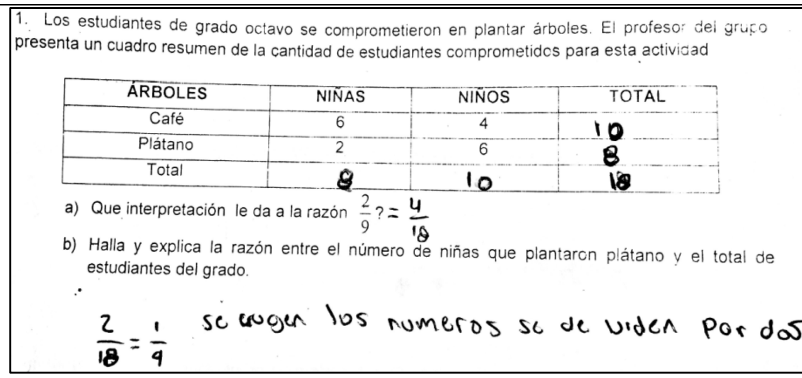
Resultado calificación cuantitativa de la actividad de exploración grados 8-9

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1a.	3	20,00	7	46,67	4	26,67	1	6,67
1b.	4	26,67	2	13,33	6	40,00	3	20,00
2.	8	53,33	7	46,67	0	0,00	0	0,00
3a.	5	33,33	4	26,67	6	40,00	0	0,00
3b.	8	53,33	1	6,67	0	0,00	6	40,00
4.	9	60,00	5	33,33	1	6,67	0	0,00
5.	11	73,33	3	20,00	1	6,67	0	0,00
6.	0	0,00	15	100,00	0	0,00	0	0,00
7.	3	20,00	7	46,67	2	13,33	3	20,00
8.	1	6,67	9	60,00	2	13,33	3	20,00
9.	2	13,33	5	33,33	2	13,33	6	40,00

Con esta actividad se busca observar los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre determinados contenidos que serán indispensables conocer para que puedan interactuar en el desarrollo de las actividades de aprendizaje planteadas sobre los temas de razón, proporción y proporcionalidad. Tales conocimientos previos fueron:

Tabla 7.
Comentarios sobre los resultados obtenidos en la actividad de exploración

CONOCIMIENTOS PREVIOS	COMENTARIOS
1. Conocer y aplicar el concepto de razón	Los estudiantes en su mayoría presentan dificultades para establecer e interpretar las razones formuladas en el problema.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


1. Los estudiantes de grado octavo se comprometieron en plantar árboles. El profesor del grupo presenta un cuadro resumen de la cantidad de estudiantes comprometidos para esta actividad

<table>
<tr><th>ÁRBOLES</th><th>NIÑAS</th><th>NIÑOS</th><th>TOTAL</th></tr>
<tr><td>Café</td><td>6</td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Plátano</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>8</td><td>10</td><td>18</td></tr>
</table>

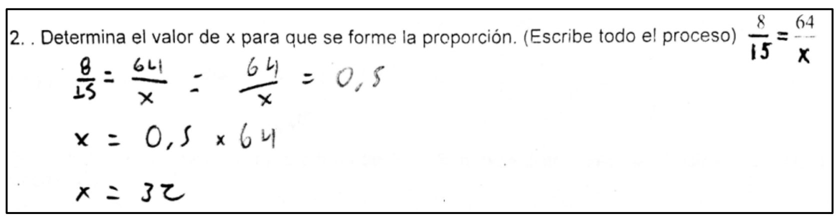
a) Que interpretación le da a la razón $\frac{2}{9}$? = $\frac{4}{18}$

b) Halla y explica la razón entre el número de niñas que plantaron plátano y el total de estudiantes del grado.

$\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ se cogen los numeros se de viden por dos

Gráfico 6. Respuesta a la pregunta 1 de la actividad de exploración, ítems a) y b)

En esta figura se observa que el estudiante no interpreta los términos de la primera razón, solo los multiplica por dos para llegar a un valor conocido en la tabla. En el ítem b) relaciona bien los elementos de la razón pero no los explica.
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Conocer y aplicar la propiedad de las proporciones</td>
<td>
El 46,67% de los estudiantes no lograron identificar la propiedad de las proporciones y hallar el valor de la incógnita.



2. . Determina el valor de x para que se forme la proporción. (Escribe todo el proceso) $\frac{8}{15} = \frac{64}{x}$

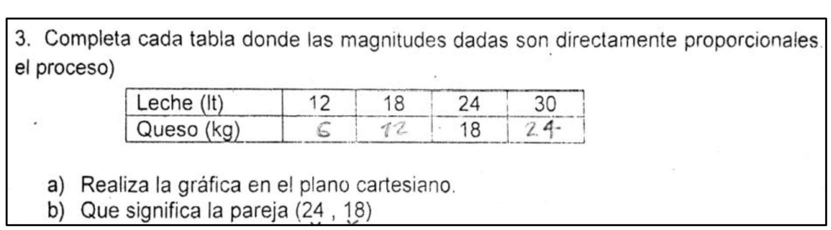
$\frac{8}{15} = \frac{64}{x} = \frac{64}{x} = 0,5$

$x = 0,5 \times 64$

$x = 32$

Gráfico 7. Respuesta a la pregunta 2 de la actividad de exploración

Se puede apreciar en la gráfica que el estudiante desconoce la propiedad fundamental de las proporciones, además le cuesta despejar la variable desconocida.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Conocer y aplicar el concepto de magnitudes directamente proporcionales.</td>
<td>
La mayoría de los estudiantes presentaron dificultades completando la tabla de magnitudes directamente proporcionales y realizar la gráfica correspondiente, también se presentaron dudas en la interpretación de un punto de la tabla.

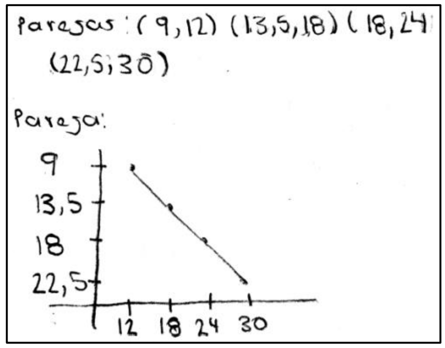
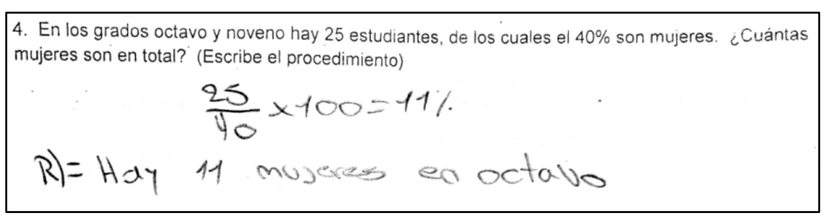


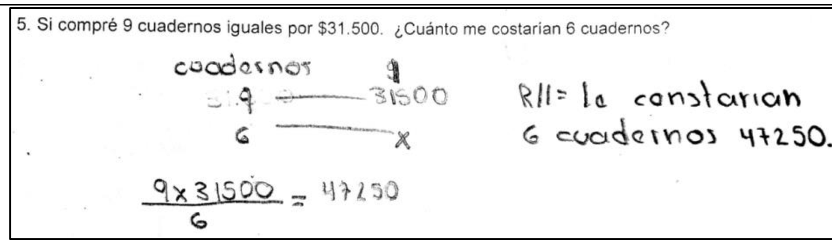
3. Completa cada tabla donde las magnitudes dadas son directamente proporcionales. el proceso)

<table>
<tr><td>Leche (lt)</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Queso (kg)</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td></tr>
</table>

a) Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

b) Que significa la pareja (24 , 18)
</td>
</tr>
</table>

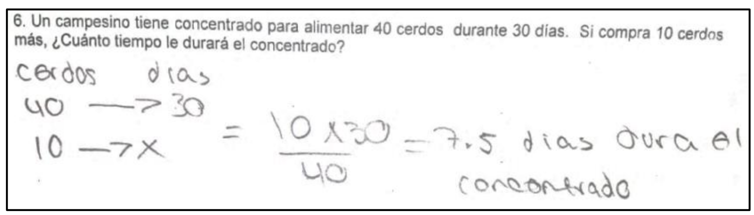
	Gráfico 8. Respuesta a la pregunta 3 de la actividad de exploración En esta figura el estudiante completa la tabla utilizando múltiplos de 6, no tiene en cuenta el valor de la constante de proporcionalidad para verificar los resultados.  Gráfico 9. Respuesta a la pregunta 3 de la actividad de exploración En la figura se aprecia que el estudiante desconoce la gráfica de magnitudes directamente proporcionales, en ella ubica mal los valores del eje y. Este error lo comenten el 26,67% de los alumnos.
4. Conocer y aplicar porcentajes	El 40% de los estudiantes fallaron resolviendo este ítem, aplicaron mal la regla de tres o dividieron entre 40  4. En los grados octavo y noveno hay 25 estudiantes, de los cuales el 40% son mujeres. ¿Cuántas mujeres son en total? (Escribe el procedimiento) $\frac{25}{40} \times 100 = 11\%$ R)= Hay 11 mujeres en octavo Gráfico 10. Respuesta a la pregunta 4 de la actividad de exploración En esta imagen se observan varios errores: el estudiante aplica mal el valor del porcentaje al multiplicar por cien y dividir entre cuarenta, el resultado no corresponde con la operación y lo expresa en porcentaje.
5. Conocer y aplicar el concepto de	El 73,33% de los estudiantes aplicaron bien la regla de tres directa, el 26,67% presentaron dificultades al multiplicar y dividir.

<table>
<tr>
<td>proporcionalidad directa</td>
<td>

5. Si compré 9 cuadernos iguales por $31.500. ¿Cuánto me costarían 6 cuadernos?

cuadernos 9
9 —— 31500
6 —— x
$\frac{9 \times 31500}{6} = 47250$
R// = le constarian 6 cuadernos 47250.

Gráfico 11. Respuesta a la pregunta 5 de la actividad de exploración

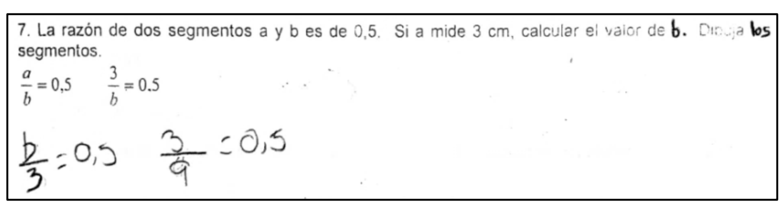
En la imagen se aprecia que el estudiante desconoce la forma adecuada para resolver problemas donde se involucran magnitudes directamente proporcionales por medio de la regla de tres.
</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad inversa</td>
<td>
El 100% de los estudiantes fallaron en este ítem, la mayoría aplicaron regla de tres directa de forma mecánica sin analizar el comportamiento de las variables, otros solo tuvieron en cuenta 10 cerdos en vez de 50.


6. Un campesino tiene concentrado para alimentar 40 cerdos durante 30 días. Si compra 10 cerdos más, ¿Cuánto tiempo le durará el concentrado?

cerdos dias
40 —> 30
10 —> x = $\frac{10 \times 30}{40}$ = 7.5 dias dura el concentrado

Gráfico 12. Respuesta a la pregunta 6 de la actividad de exploración

En la figura 12 se observan dos errores que cometieron la mayoría de los estudiantes: primero no tuvieron en cuenta los 40 cerdos iniciales para sumarle los 10 nuevos y segundo resolvieron el problema aplicando regla de tres directa.
</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Conocer y aplicar la relación entre segmentos</td>
<td>
El 80% de los estudiantes fallaron en esta prueba, se les dificulto establecer la relación y realizar el despeje de variable.


7. La razón de dos segmentos a y b es de 0,5. Si a mide 3 cm, calcular el valor de b. Dibuja los segmentos.

$\frac{a}{b} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{b} = 0.5$

$\frac{b}{3} = 0{,}5 \qquad \frac{3}{9} = 0{,}5$

Gráfico 13. Respuesta a la pregunta 7 de la actividad de exploración
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Los estudiantes tuvieron dificultad para despejar la variable y encontrar un valor adecuado para formar la proporción, tampoco realizaron el dibujo de los segmentos.</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Conocer y aplicar criterios de semejanza de triángulos</td>
<td>

El 93,33% de los estudiantes no aplicaron ningún criterio de semejanza de triángulos, la mayoría ubicaron mal los valores para establecer la proporción.

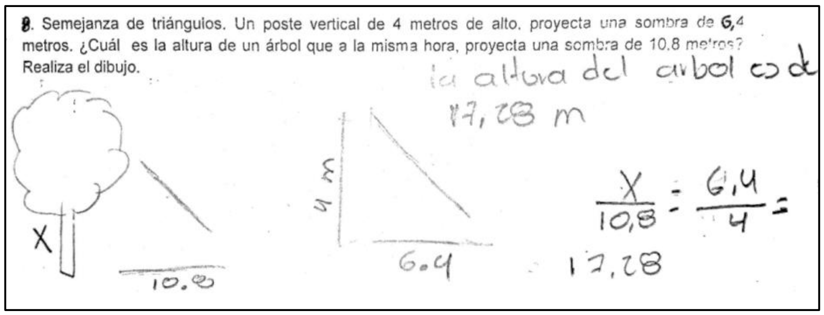


Gráfico 14. Respuesta a la pregunta 8 de la actividad de exploración

A pesar de que muchos estudiantes realizaron bien los dibujos y ubicaron adecuadamente los valores, les costó dificultad relacionarlos por medio de una proporción. Como se observa en la figura, los valores en la proporción están mal relacionados.

</td>
</tr>
<tr>
<td>9. Conocer y aplicar el teorema de Thales</td>
<td>

La mayoría de los estudiantes tuvieron dificultad en este ítem, desconocían la propiedad del teorema de Thales, ubicaron mal los valores para establecer la proporción.

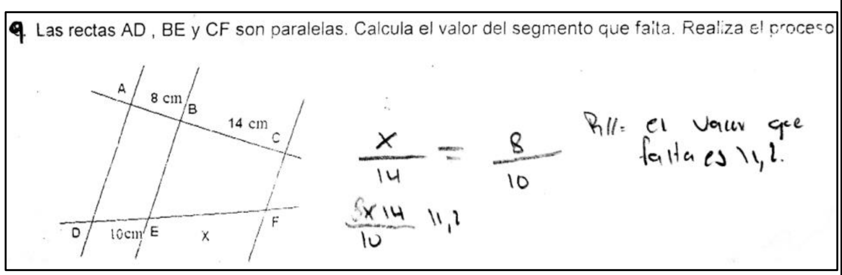


Gráfico 15. Respuesta a la pregunta 9 de la actividad de exploración

En la figura 14 se aprecia que el estudiante relaciona mal los valores

</td>
</tr>
</table>

	de la gráfica para establecer la proporción, este error lo cometieron el 33,33% de los alumnos.

Fuente: Elaboración propia

Del análisis realizado se puede mencionar de forma general que los estudiantes de nuestra investigación tienen dificultades en:

1. Reconocer y establecer la razón entre dos magnitudes.
2. Identificar la propiedad fundamental que cumplen las proporciones.
3. Reconocer e identificar la definición de magnitudes directamente proporcionales.
4. Reconocer cuándo dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales.
5. Determinar una cantidad conociendo su porcentaje.
6. Establecer la relación entre segmentos.
7. Utilizar los criterios de semejanza de triángulos.
8. Conocer y aplicar el teorema de Thales

8.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

8.2.1. La enseñanza de razón, proporción y proporcionalidad en las guías de aprendizaje para postprimaria.

En esta sección se hará un análisis didáctico de las guías de aprendizaje que se tienen en el colegio rural Rafael Uribe Uribe, con el propósito de evaluar cómo se presenta el objeto matemático en estudio. Estas guías de aprendizaje son dirigidas a la educación básica rural bajo la metodología de escuela nueva, en los grados sexto, séptimo, octavo y noveno.

Tabla 8.

Autores Guías de Aprendizaje

GRADOS	AUTORES		AÑO
6-7-8-9	Velasco M. James R. Rojas M. Luis Ernesto. Gallardo P. Yolanda	MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL	1996

Fuente: Elaboración propia

Para este análisis didáctico, se ha evaluado la manera como los autores introducen el tema, cómo lo abordan, que tipo de ejercicios y problemas emplean, como son resueltos y su estructura metodológica (actividades básicas, actividades de práctica y actividades de aplicación).

En la guía de aprendizaje de Matemáticas grado sexto en la página 95 y en la guía de aprendizaje grado 7 en la página 33 se empieza a desarrollar el objeto matemático, generalmente los temas se abordan con una primera actividad para trabajar de forma individual, luego se resuelven ejercicios de manera grupal y al finalizar se refuerzan los conceptos.

Para el desarrollo del objeto matemático se comienza con el tema de números racionales, en ambas guías se da la fracción como concepto de parte-todo, los autores muestran figuras divididas en regiones iguales con varias partes de ellas sombreadas, el estudiante debe indicar por medio de una fracción la parte sombreada. Luego se exponen los temas de fracciones equivalentes, relaciones de orden, operaciones aditivas y multiplicativas entre fracciones y unos problemas sencillos de aplicación; el trabajo se hace de forma individual y colectiva, al finalizar cada tema se concluyen los conceptos básicos.

En la página 80 de la guía de aprendizaje de matemáticas grado 7, capitulo dos, los autores desarrollan el concepto de razón y proporción. Comienzan con una actividad grupal donde se dan varias fracciones equivalentes para que los estudiantes saquen una conclusión de acuerdo a los resultados de las divisiones, luego definen el concepto de razón como una división indicada entre números enteros. Continúan estableciendo el concepto de proporción, por medio de una actividad grupal tratan el tema magnitudes directa e inversamente proporcionales e interpretan sus significados. En la sección de Practiquemos lo Aprendido se plantea un taller para que los estudiantes solucionen, en la actividad se involucran ejercicios de razones, proporciones y magnitudes directa e inversamente proporcionales.

En la página 90, el capítulo tres se llama Aplicaciones de la Proporcionalidad Porcentajes, se hace una corta introducción al tema, una actividad individual y luego la actividad en grupo donde se explica cómo hallar porcentajes y se proponen unos ejercicios para solucionar en el cuaderno. En el capítulo cuatro se desarrolla el tema de regla de tres, en la actividad individual se muestran unos problemas para que los estudiantes identifiquen si corresponden a magnitudes directa o inversamente proporcionales, en la sección de Practiquemos lo Aprendido se explica por medio de dos ejemplos como solucionar estos problemas y se dejan planteados cinco ejercicios para que solucionen.

En las guías de aprendizaje de matemáticas grados 8 y 9 no se habla sobre proporcionalidad aritmética.

En cuanto a proporcionalidad geométrica, en la página 116 de la guía de aprendizaje de matemáticas grado 6, se estudia la semirrecta y segmentos, sin ir más allá de la definición, gráfica y notación. En la guía de aprendizaje de matemáticas grado 7, la unidad de geometría se titula Congruencia y Semejanza; los autores proponen varias actividades individuales de congruencia de triángulos y construcción de triángulos dadas las medidas de sus lados, también definen los tres criterios de congruencia de triángulos y plantean varios problemas para solucionar utilizando estos criterios.

En la guía de aprendizaje de matemáticas grado 8 en la página 152, el capítulo 6 se titula Homotecias, los autores exponen su significado y plantean solo dos actividades en grupo; en la página 156 proponen una actividad individual sobre ampliaciones y reducciones. En la guía de aprendizaje de matemáticas grado 9 en la unidad de geometría no se estudia el objeto matemático.

A partir de la revisión de las guías de aprendizaje de escuela nueva en el colegio Rafael Uribe Uribe para le enseñanza de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica, los autores desarrollan el objeto matemático principalmente en la guía de grado 7.

Al iniciar el estudio de las estructuras multiplicativas y llegar al concepto de fracción, en la guía de grado 6 una de las actividades consiste en un cuadrado dividido en cuatro partes iguales, a partir de él se hacen algunas preguntas básicas que no permiten tomar diferentes interpretaciones sobre el concepto de fracción; luego se trabaja el tema de fracciones equivalentes sin exponer el concepto de proporción. Situación similar ocurre en la guía de grado séptimo, solo se trabaja la fracción como parte-todo.

En la guía de grado 7 es donde se trabaja el objeto matemático: razones, proporciones y proporcionalidad. En una primera actividad se presentan varias fracciones equivalentes, los estudiantes deben escribir una conclusión con base en los resultados de las divisiones, no se hace un análisis riguroso sobre el concepto de razón y no se tienen en cuenta las características de sus términos. Al definir el concepto de proporción, de una vez tratan el tema de magnitudes directa e inversamente proporcionales por medio de dos tablas que deben completar los estudiantes. En la sección de practiquemos lo aprendido se proponen 15 ejercicios sobre razones y proporciones, estas actividades no estimulan la creatividad de los alumnos y generalmente las resuelven de forma mecánica.

En el capítulo sobre aplicaciones de la proporcionalidad los autores exponen el tema de porcentajes, lo explican de una forma numérica y proponen varias actividades donde los estudiantes deben multiplicar cierto número por el valor del porcentaje y luego dividir entre 100. En esta sección no se hace un análisis sobre el significado del porcentaje y lo que representa; más adelante se plantean dos actividades donde los alumnos solo deben hallar el valor del porcentaje en una determinada cantidad. Al llegar al tema de regla de tres se propone una primera actividad individual que consta de tres problemas donde los estudiantes deben aplicar la regla de tres simple directa, luego los autores desarrollan un problema de regla de tres simple indirecta y dejan planteados 5 ejercicios para resolver. En general solo se plantean situaciones para que los estudiantes resuelvan de forma mecánica y no se plantean preguntas que induzcan al alumno a un análisis más profundo.

En la guía de aprendizaje de grado 6 cuando los autores se refieren a segmentos de recta, el trabajo consiste solo en trazarlos sin hacer comparaciones entre ellos y sin establecer proporciones entre sus medidas. En la guía de aprendizaje de grado 7 el trabajo que se hace sobre congruencia solo se refiere a triángulos, una de las actividades consiste en graficar dos triángulos que tienen las mismas medidas; luego los autores definen tres criterios de congruencia de triángulos y proponen 8 ejercicios para aplicarlos. En cuanto al tema de semejanza, también se reduce a triángulos, se definen cuando dos triángulos son semejantes y se proponen 6 preguntas sobre el tema. En general, al analizar las guías de aprendizaje en cuanto a la proporcionalidad geométrica, claramente se evidencia que no hay una secuencia en los temas de estudio, algunos se ven someramente, otros se resuelven de forma mecánica y otros temas no se mencionan.

8.2.2. Análisis de las Restricciones.

Esta investigación se llevará a cabo con veinte estudiantes de los grados octavo y noveno de postprimaria del colegio Rafael Uribe Uribe. Para el diseño de las situaciones didácticas se tuvieron en cuenta algunos datos de los alumnos, como: la edad (estudiantes entre los 12 y 16 años), genero (12 mujeres y 8 hombres), el entorno donde viven, la actividades agrícolas y pecuarias de la región, la itinerancia de las familias y la deserción de los estudiantes. Por otro lado, en la parte académica los alumnos en años anteriores vieron el objeto matemático en estudio, de una manera poco profunda que permitirá hacer la investigación, con la única finalidad de mejorar el aprendizaje en los alumnos.

8.3. ANALISIS EPISTEMOLÓGICO

Este análisis consiste en presentar una referencia histórica relacionada al objeto matemático en estudio ver (Anexo 19).

9. CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

En este capítulo se describen las variables macro y micro didácticas que se utilizaran en la fase experimental, se detallarán las actividades diseñadas para las secuencias didácticas, luego se identificaran las variables en las actividades de aprendizaje y finalmente se hará un análisis a priori donde se describen los tipos de relaciones con el medio y los comportamientos esperados.

9.1. DETERMINACIÓN DE LAS VARIABLES

9.1.1. Variables Macrodidácticas

Al implementar en clase las situaciones diseñadas, se estará en la fase experimental de la Ingeniería Didáctica y se tendrán en cuenta las siguientes consideraciones:

a. Todos los estudiantes son conocedores del contrato didáctico.
b. La entrega del material con las situaciones didácticas será al inicio de cada actividad, donde se detallará las acciones que deben seguir los alumnos de forma individual y grupal.
c. Los grupos se formaran de tres estudiantes, cada grupo debe estar integrado por alumnos de grado octavo y noveno.
d. Gran parte de los conocimientos previos requeridos se han trabajado en el grado anterior, y son tenidos en cuenta antes de iniciar la experimentación de la presente investigación.
e. El diseño de las situaciones de aprendizaje se ha hecho teniendo en cuenta situaciones que se presentan en su entorno.
f. Se realizan algunas actividades manuales que hacen parte de las situaciones didácticas.
g. Se ha considerado los resultados de la evaluación diagnostica del grupo para la elaboración de las actividades de aprendizaje, situaciones concretas que permitan comprender el concepto y realizar los procedimientos adecuados.

9.1.2. Variables Microdidácticas

El propósito de las situaciones didácticas es estudiar las requisitos necesarios para la construcción del conocimiento matemático, estos requisitos pueden variar de tal manera que según los valores que tome, incita en el estudiante un cambio de estrategia de resolución y por lo tanto el conocimiento para resolver la situación. Para esta investigación se consideran las siguientes variables microdidácticas en el anexo 2.

9.2 DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

9.2.1. Visión general

Las secuencias didácticas han sido elaboradas de acuerdo a la Teoría de Situaciones Didácticas. Se presentan problemas contextualizados donde los alumnos en forma individual y grupal, partiendo de sus conocimientos previos, deberán enfrentar nuevas situaciones.

Se realizaron cinco secuencias didácticas con sus respectivas actividades, usando las variables microdidácticas descritas.

- La primera secuencia didáctica es sobre el concepto de Razón, inicia con algunas actividades sobre fracciones y luego varias actividades y problemas contextualizados sobre razones.
- La segunda secuencia didáctica es sobre Proporciones, existen varias actividades donde se debe hallar una proporción dependiendo de los datos del problema, varios ejercicios para hallar el termino desconocido en una proporción, otras actividades permiten diferenciar y graficar magnitudes directa e inversamente proporcionales y solucionar problemas del contexto.
- La tercera secuencia didáctica es sobre aplicaciones de la Proporcionalidad (Regla de tres), se presentan varias actividades para que los estudiantes de

forma individual y grupal diferencien y resuelvan problemas de regla de tres simple directa e inversa.

- La cuarta secuencia didáctica es sobre porcentajes, inicia con unos ejercicios para que el estudiante identifique el porcentaje y su expresión decimal, luego varias actividades para calcular porcentajes, aumentos y descuentos.
- La quinta secuencia didáctica es sobre la aplicación geométrica de la proporciones, inicia con ejercicios sobre razones y proporciones entre segmentos, luego con actividades sobre semejanza de figuras (rectángulos) de acuerdo a la proporcionalidad de sus lados correspondientes y por último se presentan actividades sobre el teorema de Thales y semejanza de triángulos.

En el diseño de las secuenciad didácticas y de sus actividades propuestas, se inducen a pasar progresivamente por situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

9.2.2. Reconocimiento de las variables en las actividades de aprendizaje.

En el anexo 3, se relacionan las variables microdidácticas en cada una de las secuencias didácticas.

9.2.3. Actividades diseñadas.

Las actividades diseñadas con base en los análisis previos realizados se encuentran en los anexos:

Tabla 9.

Anexos Secuencias Didácticas

SECUENCIA	ANEXO	PÁGINA
Razones	Anexo 4	111
Proporciones	Anexo 5	114
Proporcionalidad	Anexo 6	121
Porcentajes	Anexo 7	127

Proporcionalidad Geométrica	Anexo 8	131

9.2.4 Interacciones con el medio y comportamientos esperados

En el anexo 9, se describe la interacción con el medio que se pretende impulsar con cada interrogante propuesto en cada una de las actividades de las secuencias didácticas, y los comportamientos que se espera de los alumnos en relación con el objeto de estudio, teniendo en cuenta las variables microdidácticas propuestas anteriormente.

9.2.5 Información complementaria

Para orientar las secuencias didácticas fue necesario obtener y dar información complementaria, se inició con una prueba denominada “Actividad de Exploración” y se realizó una síntesis al comienzo de una nueva actividad, estas actividades se resumen en el anexo 10.

9.2.6 Programación de actividades

En la tabla presentada en el anexo 11, se resumen las secuencias diseñadas en la presente investigación, donde se indican las actividades, la forma de trabajo (individual y grupal) y el tiempo de duración de cada una de ellas.

10. FASE EXPERIMENTAL

En esta fase de experimentación se aplicaran las secuencias didácticas diseñadas, se recogerá y analizará la información respecto al desempeño, dificultades y logros de los alumnos en cada una de las actividades.

10.1. Descripción de los sujetos de la investigación

La investigación se realizó con estudiantes de los grados octavo y noveno del colegio Rafael Uribe Uribe. De un total de 22 alumnos, 19 asistieron regularmente a clases; las características generales del grupo son:

Tabla 10.

Genero de los estudiantes

GENERO	CANTIDAD	%
Masculino	10	45
Femenino	12	55

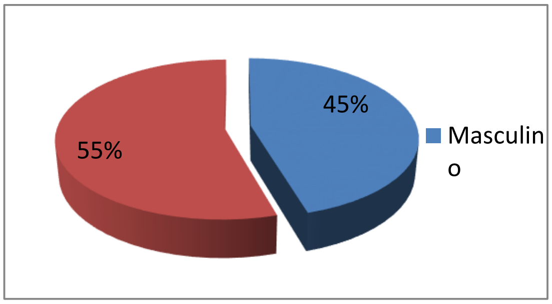


Gráfico 16. Genero de los estudiantes

Tabla 11.

Edad de los estudiantes

EDAD	CANTIDAD	%
12	1	5
13	2	9
14	6	27
15	8	36
16	3	14
17	2	9

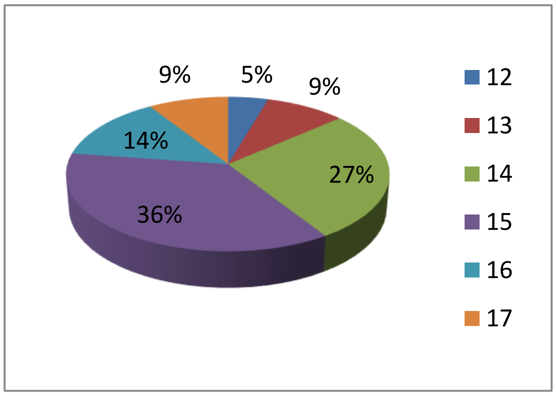


Gráfico 17. Edad de los estudiantes

Tabla 12.

Procedencia de los estudiantes

VEREDA	CANTIDAD	%
Villarazo	6	27
Piamonte	7	32
Pradera	3	14
Santa Rita	6	27

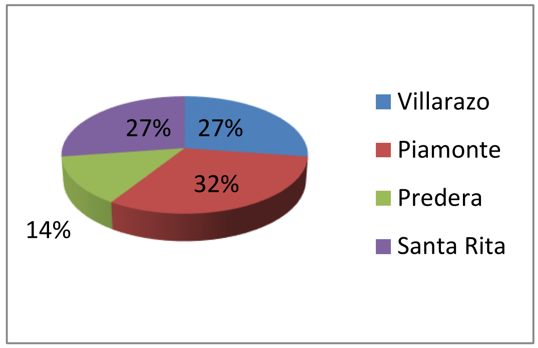


Gráfico 18. Procedencia de los estudiantes

De los resultados se puede apreciar que en la mayoría son jóvenes entre los 14 y los 15 años. En cuanto al lugar de procedencia, la mayoría de los estudiantes vienen de las veredas de Piamonte y Santa Rita.

10.2. Puesta en escena de las situaciones didácticas

En esta fase, se aplicaran las secuencias didácticas y sus respectivas actividades en 24 secciones de 60 minutos cada una y en los horarios establecidos para la materia de matemáticas en la Institución Educativa. En el cuadro del anexo 12 se presentan las fechas y horas de experimentación de cada una de las actividades:

10.3. Logros y Dificultades Encontradas en el Desarrollo de las Actividades

De acuerdo a las soluciones obtenidas de los alumnos tanto de forma individual como grupal, se describen los resultados obtenidos en cada actividad y el análisis respectivo de los logros y dificultades encontrados.

10.3.1 Resultados y Análisis de la Secuencia Didáctica sobre Razones

En el anexo 13 se analizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas en la primera secuencia didáctica, de forma individual y grupal, indicando el número de alumnos o grupos que llegaron a:

C. Respuestas correctas.

I. Respuestas incorrectas.

P. Respuestas en proceso.

B. Respuestas en blanco.

10.3.2 Resultados y Análisis de la Secuencia Didáctica sobre Proporciones

En el anexo 14 se analizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas en la segunda secuencia didáctica, de forma individual y grupal.

10.3.3 Resultados y Análisis de la Secuencia Didáctica sobre Proporcionalidad

En el anexo 15 se analizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas en la tercera secuencia didáctica, de forma individual y grupal.

10.3.4 Resultados y Análisis de la Secuencia Didáctica sobre Porcentajes

En el anexo 16 se analizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas en la cuarta secuencia didáctica, de forma individual y grupal.

10.3.5 Resultados y Análisis de la Secuencia Didáctica sobre Proporcionalidad Geométrica

En el anexo 17 se analizan los resultados obtenidos de las actividades propuestas en la quinta secuencia didáctica, de forma individual y grupal.

11. ANÁLISIS A POSTERIORI

Esta es la última fase de la Ingeniería Didáctica, el trabajo se apoya en los datos recolectados en la fase de experimentación, las producciones de los alumnos y los comportamientos esperados.

Se hará una comparación entre los análisis a priori y a posteriori de las situaciones didácticas, comparando los comportamientos esperados con los comportamientos que ocurrieron realmente en la clase. Finalmente se presentará la situación didáctica reformulada con base en lo encontrado en los análisis realizados.

11.1. Comparación entre lo encontrado en el Análisis a Priori y Análisis a Posteriori

El anexo 18 está compuesto de varias tablas donde se especifica para cada actividad la comparación entre los comportamientos esperados y los observados en la experimentación.

11.2. Comparación entre la Actividad de Exploración y la Prueba Final.

Tabla 13.

Resultado calificación individual cualitativa de la prueba final

ESTUDIANTES	**PREGUNTAS**										
G8	**1a**	**1b**	**2**	**3a**	**3b**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
E1	P	I	C	I	I	C	I	I	I	I	C
E2	P	C	C	P	I	C	I	I	B	C	I
E3	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
E4	C	C	C	P	C	C	C	P	P	C	C
E5	P	I	C	C	P	C	C	P	C	C	C
E6	C	C	C	C	C	C	C	C	P	C	C
E7	C	P	C	C	I	C	C	C	B	I	B
G9											
E8	C	I	C	C	P	C	C	C	C	C	C
E10	I	P	I	I	B	C	C	P	C	P	C

E11	P	B	C	I	B	C	C	I	B	I	I
E12	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
E14	C	C	I	C	C	C	C	C	C	C	C
E15	I	B	C	P	C	C	C	I	I	C	P

Tabla 14.

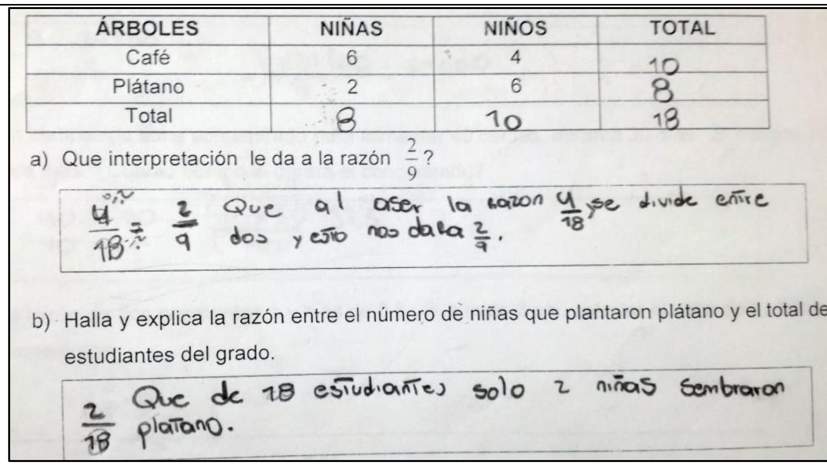
Resultado calificación cuantitativa de la prueba final

ÍTEM	**CORRECTO**		**INCORRECTO**		**EN PROCESO**		**EN BLANCO**	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1a	7	53,85	2	15,38	4	30,77	0	0,00
1b	6	46,15	3	23,08	2	15,38	2	15,38
2	11	84,62	2	15,38	0	0,00	0	0,00
3a	7	53,85	3	23,08	3	23,08	0	0,00
3b	6	46,15	3	23,08	2	15,38	2	15,38
4	13	100,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
5	11	84,62	2	15,38	0	0,00	0	0,00
6	6	46,15	4	30,77	3	23,08	0	0,00
7	6	46,15	2	15,38	2	15,38	3	23,08
8	9	69,23	3	23,08	1	7,69	0	0,00
9	9	69,23	2	15,38	1	7,69	1	7,69

Tabla 15.

Resultados de la Prueba Final

CONOCIMIENTOS FINALES	**COMENTARIOS**
1. Conocer y aplicar el concepto de razón	La mayoría de los estudiantes comprenden e interpretan las razones formuladas en el problema.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


ÁRBOLES	NIÑAS	NIÑOS	TOTAL
Café	6	4	10
Plátano	2	6	8
Total	8	10	18

a) Que interpretación le da a la razón $\frac{2}{9}$?

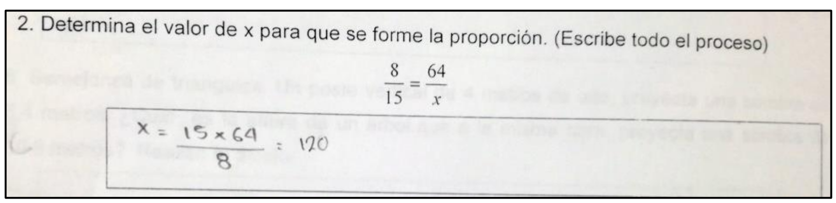
$\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ Que al aser la razon $\frac{4}{18}$ se divide entre dos y esto nos dala $\frac{2}{9}$.

b) Halla y explica la razón entre el número de niñas que plantaron plátano y el total de estudiantes del grado.

$\frac{2}{18}$ Que de 18 estudiantes solo 2 niñas sembraron platano.

Gráfico 19. Respuesta a la pregunta 1 de la prueba final , ítems a) y b)

En esta figura se observa que el estudiante en el punto a) deduce de donde sale la razón a partir de la tabla, luego la simplifica. En el punto b) relaciona bien los elementos de la razón y los explica.
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Conocer y aplicar la propiedad de las proporciones</td>
<td>
El 84,62% de los estudiantes lograron identificar la propiedad de las proporciones y hallar el valor de la incógnita.



2. Determina el valor de x para que se forme la proporción. (Escribe todo el proceso)

$$\frac{8}{15} = \frac{64}{x}$$

$x = \frac{15 \times 64}{8} = 120$

Gráfico 20. Respuesta a la pregunta 2 de la Prueba final

Se puede apreciar en la gráfica que el estudiante encuentra de forma sencilla el valor de la incógnita. La mayoría de los estudiantes verificaron la solución por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Conocer y aplicar el concepto de magnitudes directamente</td>
<td>La mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultad completando la tabla de magnitudes directamente proporcionales y realizando la gráfica correspondiente, también interpretaron la pareja dada de la</td>
</tr>
</table>

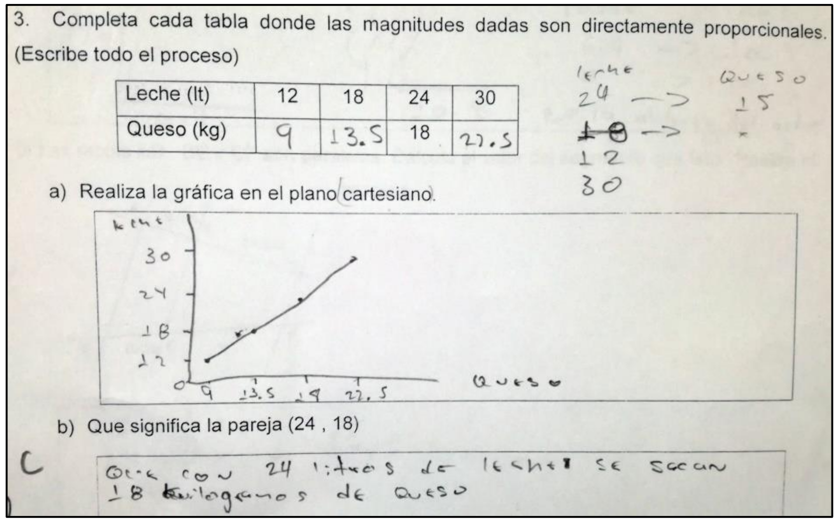
<table>
<tr>
<td>proporcionales.</td>
<td>tabla.

3. Completa cada tabla donde las magnitudes dadas son directamente proporcionales. (Escribe todo el proceso)
<table><tr><td>Leche (lt)</td><td>12</td><td>18</td><td>24</td><td>30</td></tr><tr><td>Queso (kg)</td><td>9</td><td>13.5</td><td>18</td><td>22.5</td></tr></table>
a) Realiza la gráfica en el plano cartesiano.
b) Que significa la pareja (24 , 18)
Que con 24 litros de leche se sacan 18 kilogramos de queso

Gráfico 21. Respuesta a la pregunta 3 de la Prueba final

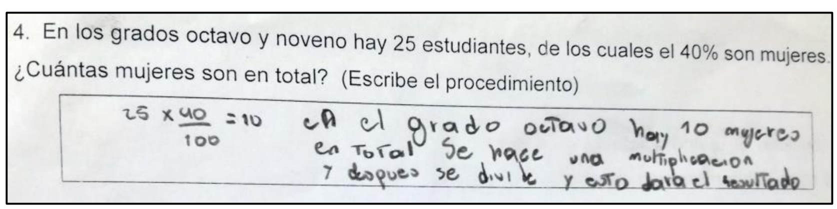
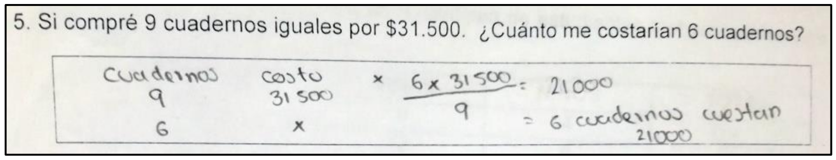
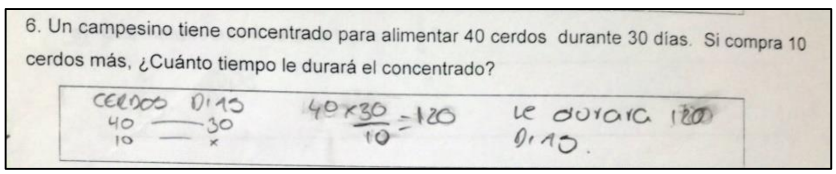
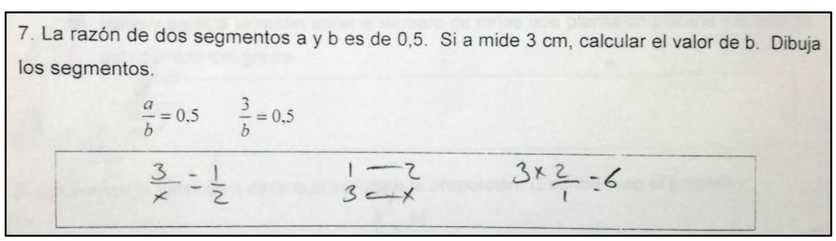
En esta figura el estudiante completa la tabla por medio de una regla de tres, no tiene dificultad en hallar los valores. Ubica los puntos en el plano cartesiano y realiza bien la gráfica. En el ítem b) interpreta correctamente los términos de la razón.</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Conocer y aplicar porcentajes</td>
<td>El 100% de los estudiantes contestaron bien este punto, no tuvieron dificultad en calcular el porcentaje.

4. En los grados octavo y noveno hay 25 estudiantes, de los cuales el 40% son mujeres. ¿Cuántas mujeres son en total? (Escribe el procedimiento)
$25 \times \frac{40}{100} = 10$ en el grado octavo hay 10 mujeres en total se hace una multiplicacion y despues se divide y esto dara el resultado

Gráfico 22. Respuesta a la pregunta 4 de la Prueba final

En esta imagen el estudiante multiplica el número de estudiantes por el porcentaje y divide ente 40, luego explica el procedimiento que realizó para calcular el la cantidad de mujeres.</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Conocer y aplicar el</td>
<td>El 84,62% de los estudiantes aplicaron bien la regla de tres directa, el</td>
</tr>
</table>

concepto de proporcionalidad directa	15,38% presentaron dificultades al multiplicar y dividir.  5. Si compré 9 cuadernos iguales por $31.500. ¿Cuánto me costarían 6 cuadernos? Cuadernos costo × 6 x 31500 / 9 = 21000 9 31 500 6 x = 6 cuadernos cuestan 21000 Gráfico 23. Respuesta a la pregunta 5 de la Prueba final En la imagen se aprecia que el estudiante conoce la forma adecuada para resolver problemas donde se involucran magnitudes directamente proporcionales por medio de la regla de tres.
6. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad inversa	El 46,15% de los estudiantes contestaron bien este punto, la mayoría aplicaron regla de tres inversa de forma correcta.  6. Un campesino tiene concentrado para alimentar 40 cerdos durante 30 días. Si compra 10 cerdos más, ¿Cuánto tiempo le durará el concentrado? cerdos Dias 40x30 / 10 = 120 le durara 120 Dias. 40 — 30 10 — x Gráfico 24. Respuesta a la pregunta 6 de la Prueba final En la figura se observa que el estudiante aplica bien la regla de tres inversa, pero no suma los 10 cerdos a los 40 iniciales.
7. Conocer y aplicar la relación entre segmentos	El 46,15% de los estudiantes contestaron bien este punto.  7. La razón de dos segmentos a y b es de 0,5. Si a mide 3 cm, calcular el valor de b. Dibuja los segmentos. $\frac{a}{b} = 0{,}5$ $\frac{3}{b} = 0{,}5$ $\frac{3}{x} = \frac{1}{2}$ 1 — 2 3 — x $3 \times \frac{2}{1} = 6$ Gráfico 25. Respuesta a la pregunta 7 de la Prueba final En esta imagen se observa que el estudiante no tuvo dificultad para encontrar el valor de la variable, por medio de una regla de tres

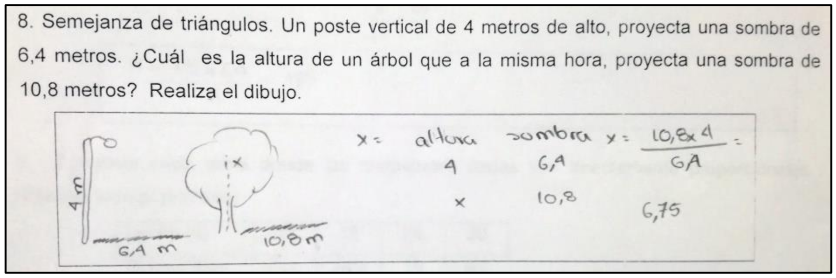
<table>
<tr><td></td><td>relaciono los datos y halló la incógnita.</td></tr>
<tr><td>8. Conocer y aplicar criterios de semejanza de triángulos</td><td>La mayoría de los estudiantes resolvieron bien este punto, utilizaron regla de tres directa para encontrar el valor desconocido.


Gráfico 26. Respuesta a la pregunta 8 de la Prueba final

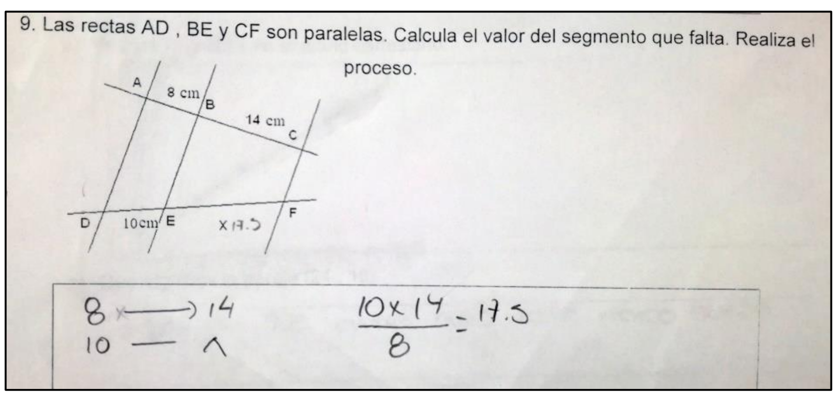
En la imagen se puede apreciar que el estudiante ubica bien los valores en el dibujo, luego los relaciona por medio de una regla de tres y encuentra el valor de la incógnita.</td></tr>
<tr><td>9. Conocer y aplicar el teorema de Thales</td><td>La mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultad en este punto, utilizaron regla de tres para encontrar el valor desconocido.


Gráfico 27. Respuesta a la pregunta 9 de la Prueba final

En la figura se observa el proceso que realiza un estudiante, por medio de una regla de tres directa relación a los valores y encuentra el valor de la incógnita.</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

Tabla comparativa entre la prueba inicial, llamada actividad de exploración de conocimientos y la prueba final realizada al terminar las secuencias didáctica. Se detallan los porcentajes del número de respuestas correctas y el número de respuestas en proceso.

Tabla 16.
Tabla comparativa actividad de exploración y prueba final

CONOCIMIENTOS	**Prueba Inicial**		**Prueba Final**	
	Correcto	**Proceso**	**Correcto**	**Proceso**
1. Conocer y aplicar el concepto de razón a) Interpreta una razón b) Calcula una razón	20,00% 26,67%	26,67% 40%	53,85% 46,15%	30,77% 15,38%
2. Conocer y aplicar la propiedad de las proporciones	53,33%	0%	84,62%	0%
3. Conocer y aplicar el concepto de magnitudes directamente proporcionales. a) Realiza la gráfica b) Interpreta parejas	33,33% 53,33%	40% 0%	53,85% 46,15%	23,08% 15,38%
4. Conocer y aplicar porcentajes	60%	6,67%	100%	0%
5. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad directa	73,33%	5,67%	84,62%	0%
6. Conocer y aplicar el concepto de proporcionalidad inversa	0%	0%	46,15%	23,08%
7. Conocer y aplicar la relación entre segmentos	20,00%	13,33%	46,15%	15,38%
8. Conocer y aplicar criterios de semejanza de triángulos	6,67%	13,33%	69,23%	7,69%
9. Conocer y aplicar el teorema de Thales	13,33%	13,33%	69,23%	7,69%

Fuente: Elaboración propia

Del análisis realizado se puede mencionar de forma general que los estudiantes de nuestra investigación tienen mejores capacidades en:

1. Reconocer y establecer la razón entre dos magnitudes.
2. Identificar la propiedad fundamental que cumplen las proporciones.
3. Reconocer e identificar la definición de magnitudes directamente proporcionales.
4. Reconocer cuándo dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales.
5. Determinar una cantidad conociendo su porcentaje.
6. Establecer la relación entre segmentos.
7. Utilizar los criterios de semejanza de triángulos.
8. Conocer y aplicar el teorema de Thales

11.3. Observaciones

11.3.1. Semejanza entre lo esperado y lo observado:

- Dificultad para establecer la relación entre fracción como parte-todo, fracción como operador y como razón.
- Dificultad para relacionar dos razones y escribir su significado.
- Dificultad para explicar el comportamiento lineal de las magnitudes directamente proporcionales.
- Dificultad para calcular la constante de proporcionalidad e indicar su aplicación.
- Dificultad para establecer la escala en los ejes horizontal y vertical al graficar magnitudes inversamente proporcionales.
- Dificultad para hallar proporciones con magnitudes inversamente proporcionales.
- Dificultad para resolver problemas de magnitudes inversamente proporcionales.
- Dificultad para hallar el porcentaje de una cantidad dado el total.

Como se había previsto, estas dificultades fueron disminuyendo conforme se realizaban las actividades individuales y grupales en las situaciones de formulación y validación.

11.3.2. Diferencias entre lo esperado y lo observado

- Poca claridad y demora a la hora de leer algunos enunciados, esto evidencia falta de comprensión lectora de los estudiantes.
- Dificultad para escribir con sus propias palabras conceptos o procesos.
- Se presentaron preguntas donde se esperaba que interpretaran la solución de forma escrita o gráfica, pero se obtuvieron respuestas inesperadas, lo cual indica que se debe reformular algunas preguntas, buscando la mayor claridad posible para facilitar la capacidad de análisis de los estudiantes y mejorar el proceso de comunicación estudiantes-profesor.

12. CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

En esta sección se exponen las conclusiones obtenidas con respecto a los objetivos propuestos, luego se darán algunas recomendaciones para futuras investigaciones relacionadas con el objeto matemático tratado en este trabajo.

12.1. Conclusiones

Al término de la investigación, se considera que se ha cumplido con el objetivo general de este trabajo:

> ***Analizar la comprensión del concepto de proporcionalidad y sus aplicaciones geométricas, en estudiantes de postprimaria del modelo escuela nueva, mediante una ingeniería didáctica.***

Se destaca de manera especial:

- Los estudiantes tomaron conciencia de que los objetos matemáticos de razón, proporción y proporcionalidad no se reducen al campo numérico operacional, ellos utilizaron estos conceptos en geometría al trabajar con segmentos, lados de figuras semejantes y teorema de Thales.
- Los estudiantes ampliaron su visión de las fracciones más allá de la interpretación parte-todo, al trabajar las interpretaciones de fracción como operador y como razón.
- Los alumnos resolvieron de manera natural varias aplicaciones del teorema de Thales por medio de una proporción o utilizando la regla de tres directa.
- Una muestra de haber logrado este objetivo general, son los buenos resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba final que se les realizó al concluir el trabajo.

12.1.1. Con relación al primer objetivo específico

Conocer los aspectos históricos - epistemológicos, didácticos y cognitivos implicados en el aprendizaje del concepto de proporcionalidad.

1. Este objetivo se cumplió, se realizó la revisión bibliográfica sobre metodologías didácticas para la enseñanza-aprendizaje del concepto de proporcionalidad aritmética y geométrica; también se revisaron las principales dificultades y obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de estos conceptos.

2. El análisis epistemológico permitió explicitar la variedad de acepciones que tiene el objeto matemático razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica, de aquí, la complejidad de estos conceptos y la dificultad para su comprensión. Como por ejemplo, las diferentes interpretaciones para el concepto de fracción; las nociones de razón y proporción que expresan comparación entre magnitudes y no necesariamente el cociente indicado entre números, así como lo ilustra la guía de aprendizaje analizada en esta investigación, y la diferentes aplicaciones en las cuales los estudiantes pueden utilizar una regla de tres para su solución.

3. El análisis preliminar en la parte cognitiva y didáctica, permitió conocer las deficiencias y errores que cometen los estudiantes en cuanto a la interpretación de una fracción como razón, la solución de proporciones cuando falta un valor, la resolución de problemas que involucran magnitudes inversamente proporcionales y la utilización de la regla de tres simple directa, el cálculo de porcentajes y las aplicaciones de teorema de Thales; algunos ejemplos de lo mencionado se muestran en las gráficas 6, 7, 10, 11, 12 y 14.

4. El análisis de restricciones permitió conocer las particularidades de los dos grupos de estudiantes a quienes se les aplicaron las secuencias didácticas; entre estas se

resalta el nivel académico muy heterogéneo con deficiencias en temas elementales, como las operaciones básicas, y despeje de variables.

12.1.2. Con relación al segundo objetivo específico

Identificar las dificultades que presentan los estudiantes, cuando resuelven actividades que involucran los conceptos de razón, proporción, y proporcionalidad aritmética y geométrica.

1. Se cumplió este objetivo, las secuencias diseñadas contribuyeron a que los estudiantes apliquen correctamente los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en la solución de problemas; considerando no solo la parte aritmética, sino también geométrica y el cálculo de porcentajes. Esto se puede observar en las soluciones que dieron los alumnos, entre estas siguientes:
    - En el gráfico 39 se observa el trabajo de uno de los estudiantes que responde correctamente al utilizar una razón para relacionar el número de preguntas incorrectas con el total de preguntas.
    - En el gráfico 48 se muestra como él estudiante establece una proporción con los datos de la tabla, encuentra el término desconocido y verifica la solución por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.
    - En el gráfico 78 se aprecia como él estudiante relaciona los valores de las magnitudes, aplica correctamente la regla de tres directa y explica el procedimiento para resolver este tipo de problemas.
    - En el gráfico 89 se observa el procedimiento correcto que hizo un estudiante para solucionar el ejercicio, el joven relaciona el total de racimos de plátanos con el 100% y calcula por medio de la regla de tres directa el porcentaje para los 8 racimos.
    - En el gráfico 100 se muestra el proceso que realiza un estudiante para solucionar el ejercicio, él calcula la longitud del segmento faltante,

escribe la proporción con las medidas de los segmentos y verifica el resultado por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.

2. La secuencia diseñada sobre razones incluye varias interpretaciones del concepto de fracción, permitiendo a los estudiantes llegar al concepto de razón y diferenciarlo de un número fraccionario; la secuencia didáctica sobre proporciones hace énfasis en el concepto de razón, facilitando a los estudiantes una mejor comprensión del tema y la secuencia sobre proporcionalidad geométrica se soporta en los conceptos de razón y proporción entre segmentos.

3. Las secuencias didácticas fueron elaboradas con base en los lineamientos de la TSD y de la ingeniería didáctica; teniendo en cuenta las dificultades presentadas por los estudiantes en el análisis a priori se definieron las variables microdidácticas (Tablas 9 y 10).

12.1.3. Con relación al tercer objetivo específico

Analizar la comprensión de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica que logran los estudiantes en la fase de experimentación de la ingeniería didáctica, mediante actividades y problemas de su entorno.

1. El objetivo se cumplió, en el capítulo 10 de este trabajo se describen los objetivos de la investigación, ponen en escena las secuencias didácticas y se analizan los logros y dificultades encontrados en las actividades. Las situaciones didácticas diseñadas contribuyeron a consolidar los aprendizajes relacionados con la solución de problemas que involucran el objeto matemático en estudio.

2. El trabajo en forma grupal permitió a los alumnos pasar por las fases de formulación y validación al comparar sus resultados y tener que dar una única

respuesta, resultado del consenso de todos los integrantes del grupo. Esto se puede apreciar en las gráficas 43, 57, 79, 96 y 107, donde los ejercicios grupales fueron diseñadas con este objetivo específico, pues las actividades no son diferentes a las de la parte individual, sino seleccionadas de estas para suscitar la discusión y llegar a una conclusión del grupo.

3. Teniendo en cuenta los resultados de la experimentación, se considera positiva la implementación de esta propuesta para la enseñanza de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica; su aplicación logró contribuir a mejorar la comprensión de estos conceptos en el marco de problemas que requieren el uso de estos objetos matemáticos.

12.1.4. Con relación al cuarto objetivo específico

Validar el nivel de aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica logrado por los estudiantes, mediante la comprensión del análisis a priori y posteriori.

1. Se cumplió con este objetivo, el análisis de los resultados del capítulo 10 dio lugar al capítulo 11, donde se hace la comparación de los comportamientos esperados con los que realmente se obtuvieron y tener elementos de juicio para validar el aprendizaje de los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad aritmética y geométrica.

2. Es importante la aceptación que tuvieron los estudiantes en cada una de las actividades propuestas en las secuencias didácticas, más aún, cuando utilizan los conceptos de proporciones y regla de tres para resolver porcentajes y problemas relacionados con el teorema de Thales y semejanza de figuras, sin la intervención del docente.

3. Teniendo en cuenta los resultados de la experimentación, se considera positiva la implementación de esta propuesta para la enseñanza de los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad aritmética y geométrica; su aplicación permitió mejorar la comprensión de los estudiantes en estos conceptos en el marco de problemas que requieren el uso de este objeto matemático en grados superiores; algunos ejemplos:
    - En el gráfico 70 se observan las respuestas que dieron los grupos de trabajo en las fases de formulación y validación, la mayoría de las dudas que tenían los estudiantes sobre proporciones y regla de tres simple directa se aclararon y contestaron acertadamente.
    - En la gráfica 98, cuando se trabajó el teorema de Thales de la secuencia sobre proporcionalidad geométrica, lo grupos de trabajo realizaron bien las gráficas de los puntos propuestos y hallaron el termino desconocido por medio de una proporción. En este tipo de problemas los estudiantes tuvieron buen desempeño, comprendieron el concepto y lo aplicaron en la solución de todas las actividades.

12.2. Recomendaciones

De acuerdo con el trabajo realizado y las conclusiones a las que se han llegado, se formulan las siguientes recomendaciones:

1. Para el aprendizaje de las matemáticas en general, y en particular de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica, incluir en las actividades situaciones que induzcan al estudiante a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización con actividades individuales y grupales de dificultades graduadas. Es importante diseñar actividades grupales pensadas especialmente para propiciar el desarrollo de las fases de formulación y validación. En esta investigación cada secuencia didáctica contaba con dos o más actividades de este tipo.

2. En el diseño de actividades de aprendizaje relacionadas con magnitudes inversamente proporcionales, enfatizar en la regla de tres inversa y la forma de hallar proporciones a partir de estas magnitudes.

3. Estimular en los estudiantes la capacidad de crear problemas y solucionarlos, relacionados con los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica.

12.3. Sugerencias para futuras investigaciones

Considero que el presente trabajo se complementará y enriquecerá con otros trabajos de investigación, sugiero algunas ideas:

1. Reproducir la experimentación de las secuencias didácticas realizadas en esta investigación con otros grupos de estudiantes de post-primaria del modelo escuela nueva o estudiantes de educación superior de otros modelos pedagógicos, para observar si los comportamientos y dificultades son los mismos.
   ¿Se podrán adaptar las secuencias didácticas de esta investigación a otros grupos y contextos escolares?

2. Cada una de las secuencias didácticas implementadas en este trabajo, permiten crear diferentes investigaciones sobre los conceptos de razón, proporción, proporcionalidad aritmética, porcentajes y proporcionalidad geométrica; profundizando en las actividades y mejorando el trabajo con los estudiantes de forma individual y grupal.
   ¿Será posible realizar diferentes investigaciones con cada una de las secuencias utilizadas en este trabajo?

3. Incluir en las secuencias didácticas actividades que permitan a los estudiantes crear problemas de su entorno y solucionarlos de forma individual y grupal,

relacionados con los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad aritmética y geométrica.

¿Se podrán crear y adaptar los problemas del entorno en cada una de las secuencias didácticas empleadas en esta investigación?

4. Utilizar en futuras investigaciones nuevas herramientas didácticas por medio de las TICs, que acerque a los estudiantes de una forma virtual al objeto matemático estudiado en este trabajo.

   ¿Cómo se pueden implementar nuevas herramientas didácticas por medio de las tics en cada una de las secuencias didácticas?

.

13. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ana IT. Beneficios e importancia de las Matemáticas. Artículo. http://www.cosasdeeducacion.es/beneficios-e-importancia-de-las-matematicas/

Andonegui, Martin Z. Razones y Proporciones. Federación Internacional Fe y Alegría, 2006

Botero, Olga E. Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de Segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación. Universidad de Antioquia. 2006

Brousseau, Guy. La Théorie des Situations Didactiques. 1998.

Brousseau, Guy. Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. Facultad de Matemáticas. Universidad Nacional de Córdoba. 1986.

Brousseau, Guy . Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. 1981.

Campeón, Milton C. Aprendizaje del concepto de función a partir de un proceso de modelación de fenómenos en contexto, mediante una ingeniería didáctica. Universidad Tecnológica de Pereira. 2015.

Calero, Antonio M. Proporcionalidad Geométrica. Artículo. 2012.

Carrillo, Beatriz S. Dificultades en el Aprendizaje Matemático. 2009.

Castro, Jeanneth de B. La investigación en Educación Matemática. Una hipótesis de trabajo. Universidad de los Andes, Venezuela. 2007

Ceballos, Edgar E. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de La Ceja. Universidad Nacional de Colombia. 2012

Chavarría, Jesennia. Teoría de las Situaciones Didácticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. 2006.

Crippa, Ana L., Grimaldi. Verónica, Machiunas. María V. La proporcionalidad. Programa Maestros y profesores enseñando y aprendiendo, Provincia de Buenos Aires. 2005.

Daza, Juan M. Propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel. Universidad Nacional de Colombia. Tesis de grado. 2014.

De Faria *Edison.* Ingeniería didáctica, Cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Universidad de Costa Rica 2006.

Douady, Regine. Artigue Michéle. Moreno, Luis. Gómez, Pedro. Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. 1995

Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Ministerios de Educación Nacional 2006.

Figueroa, Rocío V. Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. 2013.

Fiol, M. Luisa. Josep M. Fortuny. Proporcionalidad Directa. La Forma y el Número. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis. 1990.

Godino, Juan D., Batanero, Carmen, 2002. Matemáticas y sus Didáctica para Maestros. Proyecto Edumat – Maestros. Publicación realizada en el marco del Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología. Universidad de Granada.

Guacaneme, Edgar Alberto S. Versiones Históricas no Multiplicativas de la Proporcionalidad. Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional Colombia. 2015.

Guacaneme, Edgar Alberto S. Significados de los Conceptos de Razón y Proporción en el Libro V de los Elementos. 2013.

Guacaneme, Edgar Alberto S. Una mirada al Tratamiento de la Proporcionalidad en Textos Escolares de Matemáticas. Revista EMA Vol. 7, N° 1, 3-42. 2002.

Guacaneme, Edgar Alberto S. Estudio Didáctico de la Proporción y la Proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos Matemáticos formales y a los Textos Escolares de Matemáticas. Universidad del Valle, Tesis Doctorial, 2001.

Ibarra, Tanith. Sucerquia, Edison. Jaramillo, Carlos M. El Contexto de Proporcionalidad en el Modelo de Van Hiele, 2013.

Lopez, M. Olga S. Estrategias Metodológicas en Matemáticas. 2009.

Luengo, Ricardo G. Grupo Beta Coordinador. Proporcionalidad Geométrica y Semejanza. Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. 1997.

Martin, Malena. Aprendiendo Matemáticas (Blog). Enlace: http://aprendiendomatematicas.com/5-motivos-por-los-que-los-ninos-tienen-dificultades-para-aprender-a-multiplicar/ 2016.

Mejía, Francisco G. Proporciones y progresiones. Universidad de Medellín. 2009.

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda. Enseñanza y Aprendizaje de la Razón y la Proporcionalidad: un Estado de Arte, 2014

Obando, Gilberto Z. Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Modulo 1. Gobernación de Antioquia, 2006.

Obando, Gilberto Z. De la Multiplicación a la Proporcionalidad: un largo camino por recorrer. Cuarto encuentro colombiano de matemática educativa. Universidad de Antioquia, 2002.

Obando, Gilberto. Vasco, Carlos. Arboleda, Luis. Razón, proporción, proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la educación básica. Universidad de Antioquia. 2012.

Oller, M. Antonio M. Proporcionalidad Aritmética: Una Propuesta Didáctica para Alumnos de Secundaria. Universidad de Valladolid. Tesis Doctorial. 2012.

Oller, M. Antonio M. Gairín, José M. La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 2013.

Orozco, Mariela H. La Estructura Multiplicativa. Universidad del Valle. 1996.

Quintero, Erika A. Dificultades que identifican los estudiantes a través de la Metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en Educación secundaria. Tesis Universidad Autónoma de Manizales 2014.

Rico, Luis Romeo. Sierra, Modesto V. Castro, Encarnación M. Didáctica de la Matemática.

Rico, Luis. Sierra, Modesto. Didáctica de la Matemática e Investigación. 1999.

Sánchez, Francisco A. Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado séptimo de educación básica. Universidad Nacional de Colombia. 2012.

Torres, Eugenia M. El Conocimiento del Profesor de Matemáticas en la Práctica: Enseñanza de la Proporcionalidad. Universidad Autónoma de Barcelona. Tesis Doctoral. 2015.

Valverde, Gabriela S. Competencias Matemáticas Promovidas desde la Razón y la Proporcionalidad en la Formación Inicial de Maestros de Educación Primaria. Universidad de Granada, Tesis Doctorial. 2012.

Velasco M. James, Rojas M. Luis Ernesto, Gallardo Yolanda. Guías de Aprendizaje de Matemáticas modelo escuela nueva, grados 6, 7, 8 y 9. Ministerio de Educación Nacional. 1996.

ANEXO 1

ACTIVIDAD RAZÓN, PROPORCIÓN, PROPORCIONALIDAD

1. Los estudiantes de grado octavo se comprometieron en plantar árboles. El profesor del grupo presenta un cuadro resumen de la cantidad de estudiantes comprometidos para esta actividad

ÁRBOLES	**NIÑAS**	**NIÑOS**	**TOTAL**
Café	6	4	
Plátano	2	6	
Total			

a) Que interpretación le da a la razón $\frac{2}{9}$?

b) Halla y explica la razón entre el número de niñas que plantaron plátano y el total de estudiantes del grado.

2. Determina el valor de x para que se forme la proporción. (Escribe todo el proceso)

$$\frac{8}{15} = \frac{64}{x}$$

3. Completa cada tabla donde las magnitudes dadas son directamente proporcionales. (Escribe todo el proceso)

Leche (lt)	12	18	24	30
Queso (kg)			18	

a) Realiza la gráfica en el plano cartesiano.

b) Que significa la pareja (24 , 18)

4. En los grados octavo y noveno hay 25 estudiantes, de los cuales el 40% son mujeres. ¿Cuántas mujeres son en total? (Escribe el procedimiento)

5. Si compré 9 cuadernos iguales por $31.500. ¿Cuánto me costarían 6 cuadernos?

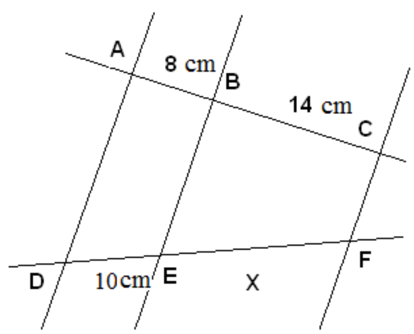
6. Un campesino tiene concentrado para alimentar 40 cerdos durante 30 días. Si compra 10 cerdos más, ¿Cuánto tiempo le durará el concentrado?

7. La razón de dos segmentos a y b es de 0,5. Si a mide 3 cm, calcular el valor de b. Dibuja los segmentos.

$$\frac{a}{b} = 0,5 \qquad \frac{3}{b} = 0,5$$

8. Semejanza de triángulos. Un poste vertical de 4 metros de alto, proyecta una sombra de 6,4 metros. ¿Cuál es la altura de un árbol que a la misma hora, proyecta una sombra de 10,8 metros? Realiza el dibujo.

9. Las rectas AD , BE y CF son paralelas. Calcula el valor del segmento que falta. Realiza el proceso.



ANEXO 2

Tabla 17.

Variables Microdidácticas

<table>
<tr><th>DESCRIPCIÓN</th><th>CASOS</th><th>CÓDIGO</th></tr>
<tr>
<td>
Fracción parte todo
Fracción como operador
</td>
<td>
$\frac{2}{5}$ significa tomar 2 partes de las 5 partes en las que se puede dividir la unidad.
$\frac{2}{5}$ es una regla que indica como operar sobre una unidad: se multiplica por 2 y se divide el resultado por 5 o se divide por 5 y se multiplica por 2
</td>
<td>VMF-1

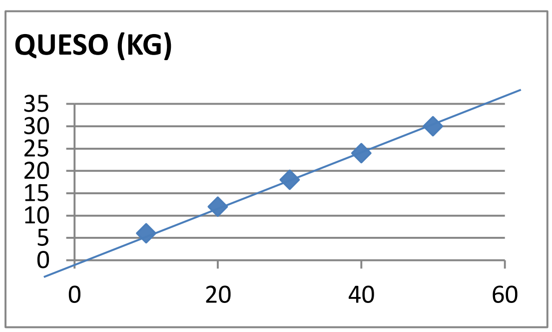
VMF-2</td>
</tr>
<tr>
<td>Concepto de Razón</td>
<td>Identifica, reconoce, relaciona los términos de una razón.
$\frac{2}{5}$ 2 de A se comparan con 5 de B.
Es una relación en la cual se comparan 2 As con 5 Bs, en un sentido multiplicativo.</td>
<td>VMR</td>
</tr>
<tr>
<td>Proporciones</td>
<td>
Identifica proporciones en un enunciado
Con los datos de la tabla establecer una Proporción:
<table>
<tr><th>No. Personas</th><th>No. Bananos</th></tr>
<tr><td>8</td><td>12</td></tr>
<tr><td>10</td><td>X</td></tr>
</table>
Calcula el término desconocido en una proporción.
Halla el valor de la variable
$$\frac{8}{10} = \frac{12}{x}$$
</td>
<td>VMP-1

VMP-2

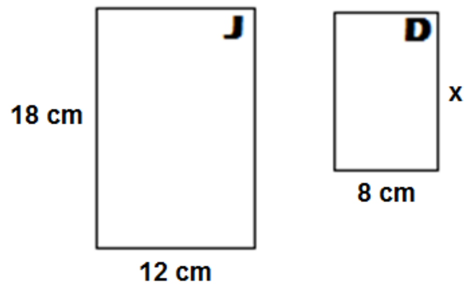
VMP-3d
VMP-3i</td>
</tr>
</table>

	• Diferencia magnitudes directa e inversamente proporcionales. Para el siguiente enunciado establece una Proporción: Si con 50 litros de leche se preparan 30 kilos de queso, ¿con 25 litros de leche, cuántos kilos de queso se pueden preparar? a. Reconoce las gráficas de magnitudes directa e inversamente proporcionales Representa gráficamente los datos de la tabla	VMP-4d VMP-4i
Proporcionalidad	Resuelve problemas por medio de regla de tres: • Directa	VMT-1d

Leche (litros)	**Queso (kg)**
10	6
20	12
30	18
40	24
50	30



	• Inversa. Si a una velocidad constante de 100 Km/h el automóvil se demora 6 horas en llegar a Bogotá ¿A Cuántos km/h debe viajar el automóvil para demorarse 4 horas?	VMT-1i
Porcentajes	Calcula porcentajes De 120 racimos de plátano, 8 están afectados por insectos. ¿Qué porcentaje de plátanos tienen plagas? Variación porcentual: • Aumenta • Disminuye ¿Qué cantidad se obtiene al disminuir 22.000 en un 30%?	VMC-1 VMC-2 VMC-3
Razones entre segmentos	Calcula la razón entre segmentos Dados dos segmentos, medirlos y establecer la razón entre ellos	VMG-RS
Proporción entre segmentos	Establece proporciones entre las medidas de varios segmentos: Tenemos los siguientes segmentos: $\overline{AB}$ = 6 cm ____________ $\overline{CD}$ = 10 cm ________________ $\overline{EF}$ = ? $\overline{GH}$ = 15 cm _________________________ Escribe una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con las medidas de los segmentos. ¿Cuánto debe medir el segmento $\overline{EF}$ para poder formar una proporción? Halla la medida del segmento $\overline{EF}$ y dibújalo.	VMG-PS
Semejanza de figuras	Reconoce cuando dos figuras son semejantes y establece proporciones entre sus lados correspondientes:	

		VMG-SF
Teorema de Thales	Resuelve problemas formando las proporciones adecuadas, por medio de triángulos semejantes y teorema de Thales Un poste vertical de 6 metros de alto, proyecta una sombra de 4 metros. ¿Cuál es la altura de un árbol que a la misma hora, proyecta una sombra de 1,8 metros? Realiza el dibujo.	VMG-T

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 3

Tabla 18.

Variables Microdidácticas en las Secuencias Didácticas

SECUENCIA DIDÁCTICA RAZONES **Actividades de Aprendizaje**	**VARIABLES MICRODIDÁCTICAS**
Actividad 1: Interpretación de las fracciones, comparaciones de parte-todo por medio de un dibujo.	Reconoce la fracción como parte todo y encuentra fracciones equivalentes (VMF-1)
Actividad 2: Interpretación de las fracciones, como operador, venta de un computador.	Opera la unidad por una fracción dada e interpreta los resultados (VMF-2)
Actividad 3 y 4: Significado de razón, ejercicios de aplicación sobre el número de estudiantes y preguntas en una prueba de matemáticas.	Reconoce el concepto de razón, calcula razones a situaciones del contexto (VMR)
SECUENCIA DIDÁCTICA PROPORCIONES **Actividades de Aprendizaje**	**VARIABLES MICRODIDÁCTICAS**
Actividad 1: Concepto de proporción, actividad sobre una torta de banano	Reconoce el concepto de proporción (VMP-1)
Actividad 2: Problemas de contexto sobre proporciones	Establece proporciones (VMP-1) Calcula el valor faltante en una proporción

	(VMP-2)
Actividad 3: Valor desconocido en una proporción	Calcula el valor faltante en una proporción (VMP-2)
Actividades 4, 5 y 6: Magnitudes Directamente Proporcionales, tabla sobre litros de leche y cantidad de queso, actividad sobre número de panes y el precio, y ejercicios sobre tiempo y km recorridos por un auto	Reconoce cuando las magnitudes son directamente proporcionales (VMP-3d) Identifica y calcula los términos faltantes en las proporciones (VMP-1, VMP-2) Grafica magnitudes directamente proporcionales (VMP-4d)
Actividades 7, 8 y 9: Magnitudes Inversamente Proporcionales Tabla sobres número de obreros y días trabajados, actividad sobre tiempo en horas y velocidad, y actividad sobre número de pintores y días trabajados	Reconoce cuando las magnitudes son inversamente proporcionales (VMP-3i) Identifica y calcula los términos faltantes en las proporciones (VMP-1, VMP-2) Grafica magnitudes inversamente proporcionales (VMP-4i)
SECUENCIA DIDÁCTICA PROPORCIONALIDAD **Actividades de Aprendizaje**	**VARIABLES MICRODIDÁCTICAS**
Actividad 1: Problemas de aplicación sobre magnitudes directamente proporcionales, tabla sobre metros de tela y el precio.	Resuelve problemas de contexto por medio de la regla de tres simple directa (VMT-1) Identifica y calcula proporciones (VMP-1, VMP-2)
Actividad 2: Problemas de aplicación sobre magnitudes inversamente proporcionales,	Resuelve problemas de contexto por medio de la regla de tres simple inversa (VMT-2) Identifica y calcula proporciones (VMP-1, VMP-

Actividad sobre velocidad de un auto y el tiempo trascurrido en horas.	2)
Actividad 3: Regla de tres directa e inversa, actividades del contexto.	Reconoce en un enunciado cual criterio aplicar (VMT-1d, VMT-1i)
Actividad 4: Problemas de regla de tres directa e inversa, ingredientes para una torta.	Resuelve ejercicios aplicando la regla de tres directa VMT-1d
Actividad 5: Problemas de regla de tres directa e inversa, ingredientes para una torta. Actividad sobre velocidad y tiempo empleado de un auto.	Resuelve ejercicios aplicando la regla de tres inversa VMT-1i
SECUENCIA DIDÁCTICA PORCENTAJES Actividades de Aprendizaje	**VARIABLES MICRODIDÁCTICAS**
Actividad 1: Tabla para reconocer el porcentaje como número decimal	Interpreta el porcentaje como un número decimal (VMC-1)
Actividad 2: Calculo de porcentajes en diferentes contextos	Calculas los porcentajes de acuerdo a la situación dada (VMC-1)
Actividades 3 y 4: Problemas variados impuestos y descuentos	Calcula aumentos (impuestos) sobre un artículo, dado el porcentaje (VMC-1)

	Calcula descuentos sobre el valor de un artículo, dado el porcentaje (VMC-3)
Actividad 5: Aumento del sueldo mensual	Calcula el aumento sobre un artículo, dado el porcentaje (VMC-1)
SECUENCIA DIDÁCTICA **APLICACIÓN GEOMÉTRICA** **Actividades de Aprendizaje**	**VARIABLES MICRODIDÁCTICAS**
Actividad 1: Razón entre segmentos	Calcula la razón entre las medidas de longitud de los segmentos (VMG-RS)
Actividad 2: Proporción entre segmentos	Establece proporciones entre las medidas de la longitud de los segmentos (VMG-PS)
Actividad 3: Semejanza de rectángulos	Identifica figuras semejantes de acuerdo a la proporcionalidad de sus lados correspondientes (VMG-SF)
Actividad 4: Teorema de Thales práctico	Establece la razón entre los segmentos (VMG-RS) Establece proporciones con los lados correspondientes (VMG-PS) Reconoce el teorema de Thales (VMG-T)
Actividad 5: Teorema de Thales ejercicios	Reconoce el teorema de Thales (VMG-T) Establece proporciones entre las medidas de la longitud de los segmentos (VMG-PS)
Actividad 6:	Reconoce el teorema de Thales (VMG-T)

Problemas del contexto, altura del poste, del árbol.	Establece proporciones entre las medidas de la longitud de los segmentos (VMG-PS)
Actividad 7: Triángulos semejantes tres rectas paralelas y dos secantes	Calcula la razón entre las medidas de longitud de los segmentos (VMG-RS) Establece proporciones entre las medidas de la longitud de los segmentos (VMG-PS) Identifica figuras semejantes de acuerdo a la proporcionalidad de sus lados correspondientes (VMG-SF)
Actividad 8: Triángulos semejantes recortados	Calcula la razón entre las medidas de longitud de los segmentos (VMG-RS) Identifica figuras semejantes de acuerdo a la proporcionalidad de sus lados correspondientes (VMG-SF)

Fuente: Elaboración propia

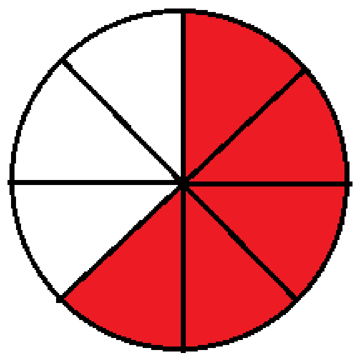
ANEXO 4

SECUENCIA DIDÁCTICA RAZONES

<u>TRABAJO INDIVIDUAL</u>

Una fracción es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$ con b≠0.

1) La fracción que representa el dibujo es $\frac{5}{8}$



Responde:

1.1) ¿Qué significa el denominador?

1.2) ¿Qué significa el numerador?

1.3) Si tuviera la fracción $\frac{10}{16}$, ¿Cómo la representaría? ¿Qué relación encuentra con la fracción anterior?

1.4) Escribe otra fracción que se relacione con las dos anteriores y represéntala gráficamente

2) Resuelve

2.1) Un computador se compró hace cuatro meses por $ 2.040.000 y se vende por los $\frac{5}{8}$ del costo. ¿En cuánto se vende el computador?

2.2) Los $\frac{5}{8}$ del punto 1) significan lo mismo que los $\frac{5}{8}$ del punto 2), explica.

2.3) Existe alguna relación de esta fracción en los ejercicios 1) y 2), explica y representa gráficamente.

ACTIVIDAD EN GRUPO

3) Responde

3.1) El salón de grado octavo y noveno tiene 24 estudiantes y $\frac{5}{8}$ del total son hombres. ¿Cuántas mujeres son?

3.2) ¿Qué relación existe entre las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$?

3.3) ¿Qué significa el numerador y el denominador de la fracción $\frac{15}{24}$?

3.4) ¿Qué significa el numerador y el denominador de la fracción $\frac{5}{8}$?

3.5) ¿Cómo relacionaría el número de mujeres y el total de estudiantes por medio de una fracción?

3.6) ¿En los puntos 1), 2) y 3) la fracción $\frac{5}{8}$ tiene diferente aplicación? Explica cada una.

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

4) En el punto 3) $\frac{5}{8}$ se llama una razón. Responde:

4.1) Podemos afirmar que una razón es:
a) La comparación de dos cantidades por un cociente
b) El producto de dos cantidades dadas
c) La suma de dos cantidades
d) La igualdad entre dos cantidades

4.2) Una prueba de matemática tiene 10 preguntas, un alumno responde correctamente 6 de estas.

La razón $\frac{6}{10}$ simplificada queda $\frac{3}{5}$ y significa que por cada 5 preguntas contesto bien 3.

a) Escribe la razón entre el número de preguntas incorrectas y el número total de preguntas

b) Escribe la razón entre el número de preguntas incorrectas y el número de preguntas correctas

c) Que significado le da a las razones:
$\frac{12}{20}$, $\frac{18}{30}$

d) ¿Qué relación existe entre las fracciones $\frac{6}{10}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{18}{30}$

4.3) En una encuesta realizada a un grupo de personas, 30 saben nadar y 6 no.
Escribe la razón entre:

a) Los nadadores y los no nadadores

b) Los nadadores y el total de encuestados

c) ¿Qué significado le da a la razones $\frac{1}{6}$ y $\frac{7}{42}$? Están relacionadas estas dos fracciones?

5) Responde:

5.1) Según los ejercicios anteriores, define que es una razón.

5.2) ¿Cuál es la relación que existe entre los términos de una razón?

TRABAJO EN GRUPO

En grupos de tres estudiantes, van a socializar las soluciones y concluyen cada una.
Escogen un líder del grupo quien explicará a los demás las conclusiones a las que llegaron.

ANEXO 5

SECUENCIA DIDÁCTICA PROPORCIONES

La razón es una comparación entre dos cantidades. La razón 1 es a 2 es lo mismo que las razones 2 es 4, 5 es a 10, 4 es a 8.

Todas se pueden expresar como fracciones equivalentes.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{4}{8}$$

A partir de una razón se obtienen razones que resultan equivalentes a la razón original.

Por ejemplo:
Para preparar una torta de banano para 8 personas se requieren 12 bananos. Para el doble de personas, ¿Cuántos bananos se necesitan?

Al comparar las magnitudes número de personas y cantidad de bananos se obtiene:

- Para 8 personas se requieren 12 bananos, le corresponde la razón $\frac{8}{12}$
- El doble de personas es 16, se requieren 24 bananos, le corresponde la razón $\frac{16}{24}$

Al simplificar las dos razones queda:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$ Se divide cada término entre 4

$$\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$ Se divide cada término entre 8

La razón $\frac{2}{3}$ significa que para 2 personas se requieren 3 bananos para preparar la torta.

Las dos razones $\frac{8}{12}\ y\ \frac{16}{24}$ son equivalentes, esto significa que:

$$\boxed{\frac{8}{12} = \frac{16}{24} \Rightarrow \text{Esta igualdad se llama } \textbf{PROPORCIÓN}}$$

Multiplicando en cruz ambos términos tenemos que:

$$8 \text{ x } 24 = 12 \text{ x } 16$$

$$192 = 192$$

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. Observa la siguiente tabla:

No. Personas	No. Bananos
8	12
10	X

1.1. Por medio de una proporción relaciona los datos de la tabla.

1.2. ¿Qué significa la última fila de la tabla?

10	X

1.3. ¿Calcula el valor de x en la proporción anterior?
¿Qué significa este resultado?

2. Escribe una proporción para cada enunciado, luego haya la solución

2.1. Si con 20 litros de leche se hacen 12 kilos de queso. ¿Con 50 litros de leche, cuántos kilos de queso se preparan?

2.2. Con $1.200 se compran tres pandebonos. ¿Cuánto dinero se necesita para comprar 8 Pandebonos?

2.3. Santiago gana $14.000 por cinco horas de trabajo, si trabaja en la semana 22 horas. ¿Cuánto dinero se ganó?

3. Encuentra el valor de la letra desconocida, de modo que se obtengan razones equivalentes. Indica el proceso.

3.1. $\frac{3}{18} = \frac{x}{90}$

3.2. $\frac{x}{14} = \frac{48}{56}$

3.3. ¿Qué significado le da a una proporción?

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

4. Observa la siguiente tabla:

Leche (litros)	**Queso (kg)**
10	6
20	12
30	18
40	24
50	30

4.1. ¿Qué sucede el queso a medida que aumenta la leche?

4.2. Escribe una razón con los datos de la tabla y explícala

4.3. Establece una proporción con los datos de la tabla y explícala

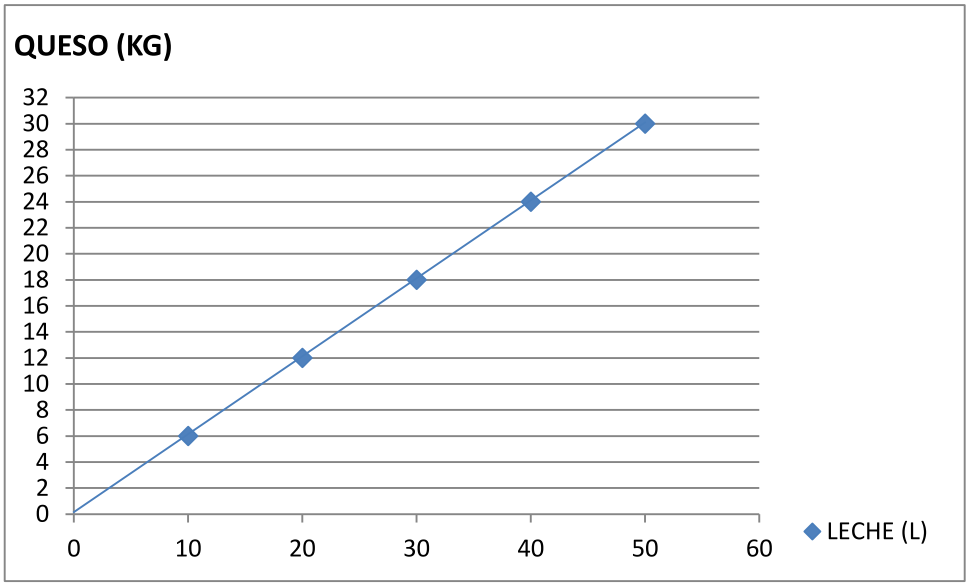
Si calculamos todos los cocientes, encontramos que:

$$\frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad \frac{12}{20} = 0{,}6 \qquad \frac{18}{30} = 0{,}6 \qquad \frac{24}{40} = 0{,}6 \qquad \frac{30}{50} = 0{,}6$$

Todos los valores de los cocientes es 0,6, este valor se conoce como CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

> Si el cociente entre las razones de las magnitudes es constante se dice que las magnitudes son DIRECTAMENTE PROPORCIONALES y se puede representar la información de la tabla por medio de una gráfica en un plano cartesiano.

Representación cartesiana de datos



Como se observa en la figura anterior, los puntos están alineados y definen una recta que pasa por el punto (0,0).

4.4. ¿Será correcto unir los puntos con una recta para representar la situación si sólo tengo esos puntos? Justifica la respuesta.

Con la gráfica se puede observar que la recta muestra cómo se correlacionan las magnitudes involucradas en la situación. Además, se pueden calcular otros valores que no se establecieron en la tabla.

4.5. ¿Con 25 litros de leche, cuántos kilos de queso se pueden preparar? Indica el procedimiento para calcularlo.

4.6. ¿Para preparar 45 kilos de queso, cuántos litros de leche se necesitan? Escribe el procedimiento para calcularlo.

4.7. ¿Cómo se determina la constante de proporcionalidad? ¿Para qué se puede utilizar? Justifica la respuesta

5. Analiza la situación planteada en la siguiente tabla

No. Panes	5	10	15	20
Precio	3.500	7.000	10.500	14.000

5.1. Determina la constante de proporcionalidad

5.2. Determina si las magnitudes relacionadas son directamente proporcionales

5.3. Realiza la gráfica a la tabla anterior.

ACTIVIDAD EN GRUPO

6. Completa la tabla de magnitudes directamente proporcionales, indica el proceso

Tiempo (hrs)	2	4	6	8
Distancia (km)		60		

6.1. ¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

6.2. Realiza la gráfica a la tabla anterior.

6.3. ¿Qué significa la razón 4/60?

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

7. Observa la siguiente tabla:

No. Obreros	**Días de trabajo**
1	30
2	15
5	6
15	2

7.1. ¿Qué sucede con los días de trabajo a medida que aumentan los obreros?

7.2. Escribe una razón con los datos de la tabla y explícala

7.3. Establece una proporción con los datos de la tabla y explícala

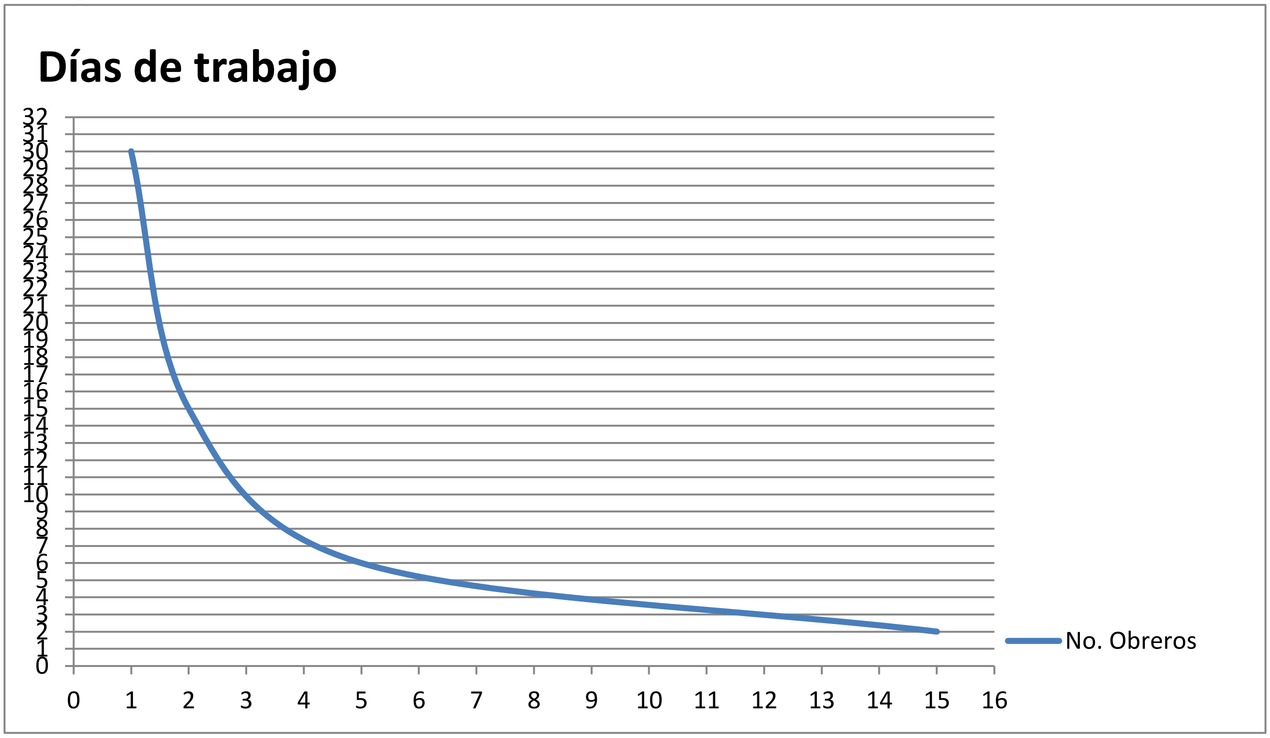
Si calculamos todos los productos, encontramos que:

1x30=30 2x15=30 5x6=30 15x2=30

Todos los valores de los productos son de 30, este valor se conoce como CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.

Si el producto de los valores correspondientes a las magnitudes es constante se dice que las magnitudes son INVERSAMENTE PROPORCIONALES y se puede representar la información de la tabla por medio de una gráfica en un plano cartesiano.

Representación cartesiana de datos



Como se observa en la figura anterior, al unir los puntos se forma una curva decreciente.

7.4. ¿Será correcto unir los puntos con una curva para representar la situación si sólo tengo esos puntos? Justifica la respuesta.

Con la gráfica se puede observar que la curva muestra cómo se correlacionan las magnitudes involucradas en la situación. Se podrán calcular otros valores que no se establecieron en la tabla?

7.5. ¿Si fueran 10 obreros, cuántos días trabajarían? Se puede realizar el cálculo?. Indica el procedimiento.

7.6. ¿Si se necesita terminar la obra en 20 días, cuántos obreros se necesitan? Se puede realizar el cálculo? Escribe el procedimiento.

7.7. ¿Cómo se determina la constante de proporcionalidad? ¿Para qué se puede utilizar? Justifica la respuesta

8. Analiza la situación planteada en la siguiente tabla

Tiempo (horas)	1	2	10	20	80
Velocidad	400	200	40	20	5

8.1. Determina la constante de proporcionalidad

8.2. Determina si las magnitudes relacionadas son inversamente proporcionales

8.3. Realiza la gráfica a la tabla anterior.

ACTIVIDAD EN GRUPO

9. Completa la tabla de magnitudes inversamente proporcionales, indica el proceso

No. Pintores	2	4	6	8	10
Tiempo (días)	24				

9.1. ¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

9.2. Realiza la gráfica a la tabla anterior.

9.3. ¿Qué significa la razón 2/24?

TRABAJO EN GRUPO

En grupos de tres estudiantes, van a socializar las soluciones y concluyen cada una.
Escogen un líder del grupo quien explicará a los demás las conclusiones a las que llegaron.

ANEXO 6

SECUENCIA DIDÁCTICA PROPORCIONALIDAD

$\frac{8}{12} = \frac{16}{24}$ Esta igualdad se llama **PROPORCIÓN**

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. La siguiente tabla representa el precio por metros de tela.

Metros de tela	**Precio de la tela**
2	$9.000
4	$18.000
5	$22.500
7	$31.500
9	$40.500
12	$54.000

1.1. Explica como es el comportamiento de los metros de tela y su precio

1.2. Calcula la constante de proporcionalidad:

1.3. Que nombre reciben estas magnitudes: ___________________________________

1.4. Escribe dos proporciones con los siguientes datos. ¿Qué puede concluir?

Metros de tela	**Precio de la tela**
2	$9.000
4	$18.000

1.5. Si 2 metros de tela cuestan $9.000. ¿Cuánto costaran 6 metros? Completa la tabla, resuelve el problema.

Metros de tela	Precio de la tela

1.6. Si 5 metros de tela cuestan $22.500. ¿Cuánto costaran 15 metros de tela?

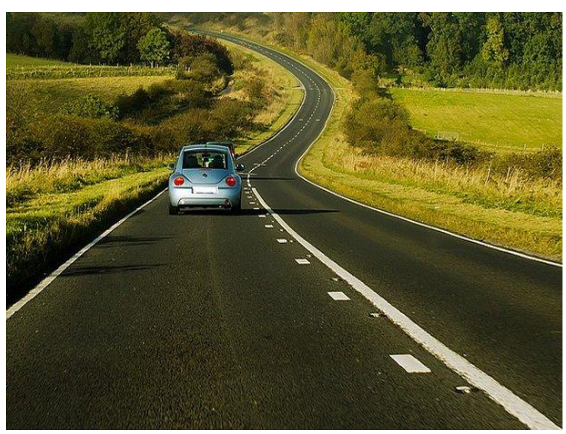
Metros de tela	Precio de la tela

1.7. Si 12 metros de tela cuestan $54.000. ¿Cuánto metros de tela se pueden comprar con $90.000?

1.8. Observa la siguiente proporción $\frac{2}{15} = \frac{\$9.000}{x}$. Existe algún procedimiento general que permita resolver estos problemas, resuelve este y explica ese procedimiento.

2. La siguiente tabla representa la velocidad (en km/h) y el tiempo en horas de un automóvil para recorrer la distancia entre Circasia y Bogotá.

Velocidad del automóvil (km/h)	Tiempo en horas
50	12
60	10
70	8,57
80	7,5
90	6,67
100	6



2.1. Explica como es el comportamiento de la velocidad del automóvil y el tiempo empleado en recorrer la distancia.

2.2. Calcula la constante de proporcionalidad:

2.3. Que nombre reciben estas magnitudes: ______________________________

2.4. Escribe dos proporciones con los siguientes datos. ¿Qué puede concluir?

Velocidad del automóvil (km/h)	**Tiempo en horas**
50	12
60	10

2.5. Si a una velocidad constante de 50 Km/h el automóvil se demora 12 horas en llegar a Bogotá ¿Cuántas horas empleara si viaja a 85 km/h? Complete la tabla, resuelva el problema.

Velocidad del automóvil (km/h)	**Tiempo en horas**

2.6. Si a una velocidad constante de 80 Km/h el automóvil se demora 7,5 horas en llegar a Bogotá. ¿Cuántas horas empleara si viaja a 120 km/h?

Velocidad del automóvil (km/h)	**Tiempo en horas**

2.7. Si a una velocidad constante de 100 Km/h el automóvil se demora 6 horas en llegar a Bogotá ¿A Cuántos km/h debe viajar el automóvil para demorarse 4 horas?

2.8. Observa la siguiente proporción $\frac{50}{150} = \frac{X}{12}$. Existe algún procedimiento general que permita resolver estos problemas, resuelve este y explica ese procedimiento.

3. Para cada problema identifica si corresponde una proporcionalidad directa o inversa, explica la elección de cada criterio.

Un campesino tiene concentrado para alimentar 22 cerdos durante 40 días. Si compra 14 cerdos más, ¿Cuánto tiempo le durará el concentrado?

Durante un día de trabajo, 6 operarios cavan una zanja de 80 metros de longitud. ¿Cuántos metros cavarán 42 operarios trabajando en las mismas condiciones?

Si con 120 litros de leche se hacen 55 kg de queso, ¿Cuántos litros de leche se necesitan para hacer 100 kg de queso?

2 trabajadores enchuspan las matas de plátano de una finca en 20 horas. ¿Cuántas horas tardarían en enchuspar las mismas plantas 5 trabajadores?

ACTIVIDAD EN GRUPO

4. Torta de banano para 8 personas

INGREDIENTES	INSTRUCCIONES
• 500 gramos de harina de trigo • 400 gramos de azúcar • 300 gramos de mantequilla • 8 huevos • 12 bananos • 20 gramos de polvo de hornear • 15 gramos de esencia de banano	Cremar la mantequilla con el azúcar. Agregar los huevos uno por uno y mezclar bien. Incorporar los bananos triturados y la esencia. Agregar la harina y el polvo de hornear. Colocar la mezcla en un recipiente y llevar al horno a

Completar la siguiente tabla para determinar la cantidad de ingredientes que se necesita para la torta, de acuerdo con el número de personas que comerán. Escribe todo el procedimiento.

INGREDIENTES / No. DE PERSONAS	HARINA	AZÚCAR	MANTEQUILLA	HUEVOS	BANANOS	POLVO DE HORNEAR	ESENCIA DE BANANO
8	500 gramos	400 gramos	300 gramos	8	12	20 gramos	15 gramos
12							
20							

ACTIVIDAD EN GRUPO

5. Completa la siguiente tabla que representa la velocidad en que se viaja para ir de Circasia a Manizales y el tiempo empleado. Escribe todo el procedimiento.

TIEMPO (horas)	1	2	4		8	10	12
VELOCIDAD (km/h)			60	40		24	

TRABAJO EN GRUPO

En grupos de tres estudiantes, van a socializar las soluciones y concluyen cada una.
Escogen un líder del grupo quien explicará a los demás las conclusiones a las que llegaron.

ANEXO 7

SECUENCIA DIDÁCTICA PORCENTAJES

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. Completa la siguiente tabla:

PORCENTAJE	CÓMO SE LEE	RAZÓN (operador)	EXPRESIÓN DECIMAL
30%		$\frac{30}{100}$	
			0,60
	Veinticinco por ciento		
7%			
		$\frac{15}{100}$	

2. Calcular el porcentaje de los siguientes enunciados:
   2.1. 25 mangos de 200 están dañados

Mangos	Porcentaje

   2.2. 40 estudiantes de 90 son mujeres

   2.3. De 120 racimos de plátano, 8 están afectados por insectos

   2.4. Existe un procedimiento general para resolver estos problemas, describe los pasos para solucionarlos.

2.5. Que nombre recibe el método para solucionar los problemas anteriores:

____

3. Calcular los siguientes porcentajes:

3.1. El 20% de 500

3.2. El 0,75% de 2.000.000

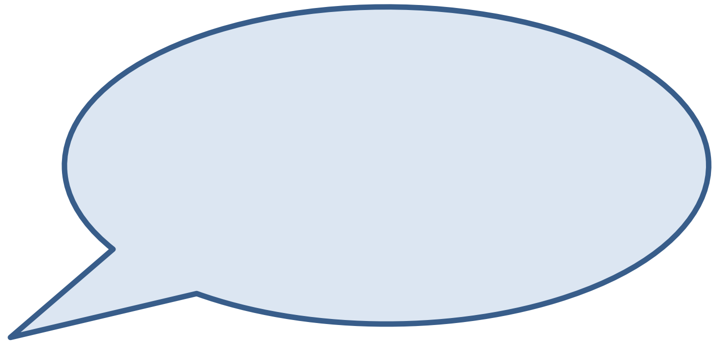
3.3. Explica el procedimiento utilizado para calcular los porcentajes anteriores

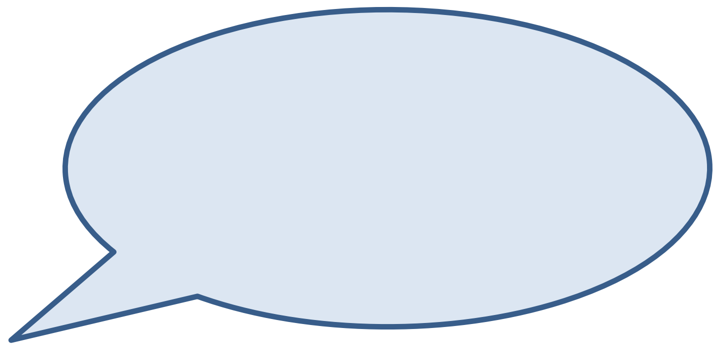
3.4. ¿Qué cantidad se obtiene al aumentar 15.000 en un 25%?

3.5. ¿Qué cantidad se obtiene al disminuir 22.000 en un 30%?

<u>ACTIVIDAD EN GRUPO</u>

4. Observa las siguientes imágenes y calcula el nuevo valor de lo ofrecido





Santiago Osorio recibe un sueldo mensual de $1.150.000 más un bono por alimentación del 20%. ¿Cuánto recibe en total?

ACTIVIDAD EN GRUPO

5. El sueldo de Handy Agudelo aumenta un 3% cada mes. En enero ganó $ 900.000. Calcule el sueldo que recibirá en los siguientes meses:

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
$900.000					

Explica el procedimiento para realizar los cálculos anteriores:

TRABAJO EN GRUPO

En grupos de tres estudiantes, van a socializar las soluciones y concluyen cada una.
Escogen un líder del grupo quien explicará a los demás las conclusiones a las que llegaron.

ANEXO 8

SECUENCIA DIDÁCTICA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA

RAZÓN: Es una comparación entre dos cantidades: $\frac{8}{12}$

PROPORCIÓN: Es una igualdad entre dos razones: $\frac{8}{12} = \frac{24}{26}$

<u>ACTIVIDAD INDIVIDUAL</u>

1. (Segmentos) Observa los siguientes segmentos de recta:

$\overline{AB}$ = 4 cm ______________________

$\overline{CD}$ = 6 cm _________________________________

1.1. Calcula la razón entre los segmentos, simplifica el resultado:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = -$$

1.2. Dibuja, calcula la razón entre los siguientes pares de segmentos y simplifica:

$\overline{EF}$ = 6 cm

$\overline{GH}$ = 9 cm

Razón= $\frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = -$

$\overline{IJ}$ = 5 cm

$\overline{KL}$ = 10 cm

Razón= $\frac{\overline{IJ}}{\overline{KL}} = -$

$\overline{MN}$ = 8 cm

$\overline{OP}$ = 12 cm

Razón= $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{OP}} = -$

1.3. ¿Con cuáles parejas de segmentos se puede establecer una proporción? Escribe las proporciones y explica porque se pueden formar.

2. Tenemos los siguientes segmentos:

$\overline{AB}$ = 6 cm

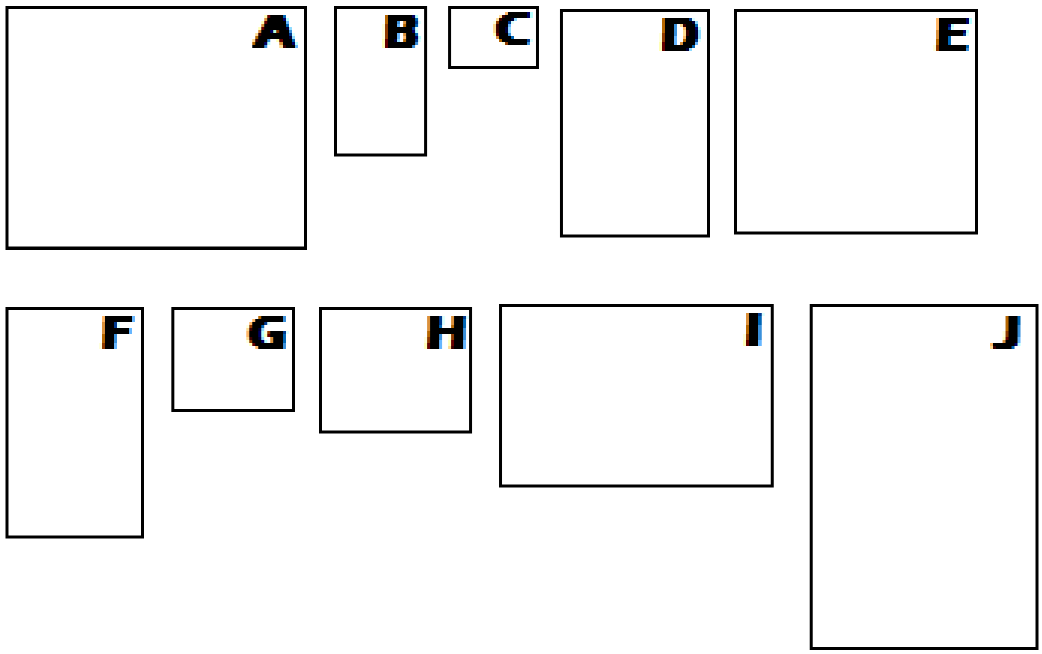
$\overline{CD}$ = 10 cm

$\overline{EF}$ = ?

$\overline{GH}$ = 15 cm

Escribe una proporción de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con las medidas de los segmentos. ¿Cuánto debe medir el segmento $\overline{EF}$ para poder formar una proporción? Halla la medida del segmento $\overline{EF}$ y dibújalo.

3. (Semejanza) Se le entrega a los estudiantes una colección de rectángulos para que los agrupen de acuerdo a la forma, aunque tengan distinto tamaño (Fiol M. p. 124). Sugerencia: Tomar un rectángulo con la mano derecha y con la izquierda otro rectángulo, intentar taparlo acercando o alejando un rectángulo.



3.1. Completar la siguiente tabla con las medidas respectivas para cada rectángulo.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
LARGO										
ANCHO										

3.2. Calcular la razón entre el largo y el ancho de cada rectángulo, simplifica.

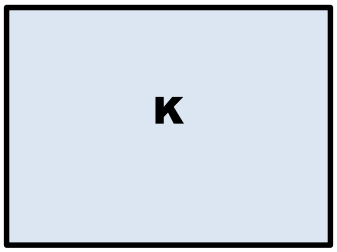
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
RAZÓN largo/ancho										

3.3. ¿Qué puede concluir entre los resultados obtenidos y las parejas agrupadas?

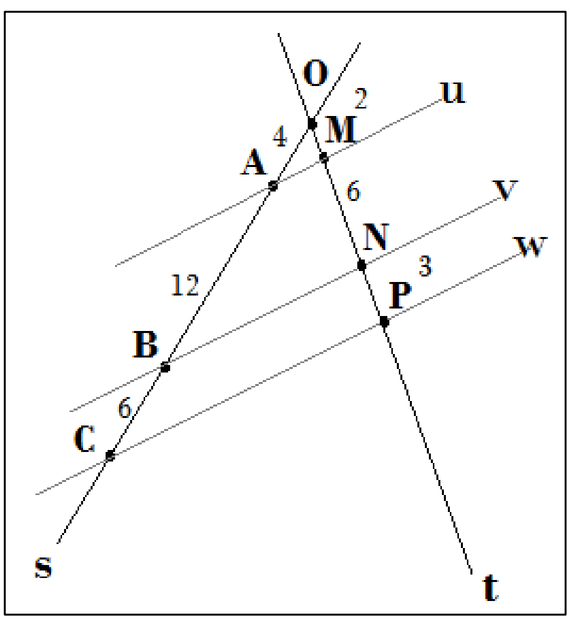
3.4. Forma las proporciones con las medidas de los rectángulos SEMEJANTES

RECTÁNGULOS	A - H				
PROPORCIÓN					

3.5. Dado el rectángulo K de medidas 6 cm x 8 cm, dibuja un rectángulo semejante y escribe la proporción entre la medida de sus lados



4. (Teorema de Thales) En una cartulina se dibujan las dos rectas secantes *s* y *t*, se ubican los puntos A, B y C en la recta *s* a 4 cm, 16 cm y 22 cm de distancia al punto O; en la recta *t* se ubican los puntos M, N y P a 2 cm, 8 cm y 11 cm de distancia al punto O. (Pueyo M. p. 2)



Se trazan rectas que unan los puntos A y M, B y N, C y P.

Calcular las siguientes razones con las medidas de los segmentos:

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} =$ $\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}} =$

$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} =$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} =$

$\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} =$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} =$

4.1. ¿Qué conclusión se obtiene de los resultados?

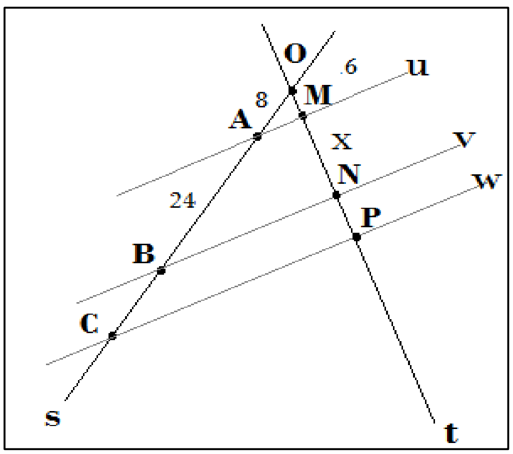
4.2. ¿Qué nombre recibe el resultado de las razones? ______________________

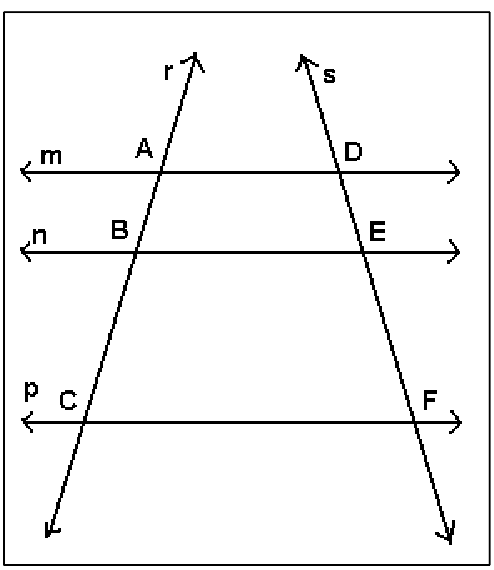
4.3. ¿Cómo son las rectas u, v y w?

4.4. Escribe cuatro proporciones con las razones dadas

ACTIVIDAD EN GRUPO

5. Para cada uno de los ejercicios utiliza el teorema de Thales (anterior) formando la proporción y hallando el lado que falta (X).





Si m || n || p ubica los valores y haya el valor de la incógnita X_i

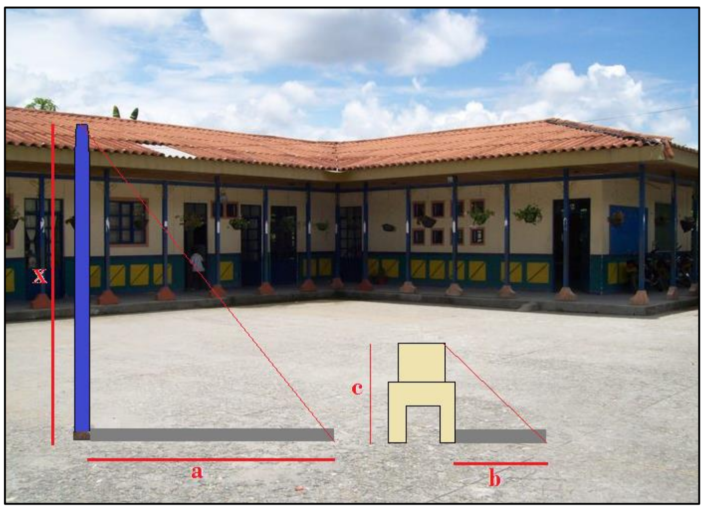
AB	12		14	
BC	X_1	10	21	8
AC		X_2		24
DE	15	15		
EF			X_3	12
DF	20	25	42	X_4

<u>ACTIVIDAD INDIVIDUAL</u>

6. Práctica teorema de Thales.

6.1. Calcular la altura del poste

- Medir la longitud de la sombra del poste (a) y la longitud de la sombra de la silla (b)
- Medir la altura de la silla
- Realiza un dibujo de la situación y ubica las medidas. Utilizando el teorema de Thales calcula la longitud del poste (X).



6.2. Un poste vertical de 6 metros de alto, proyecta una sombra de 4 metros. ¿Cuál es la altura de un árbol que a la misma hora, proyecta una sombra de 1,8 metros? Realiza el dibujo.

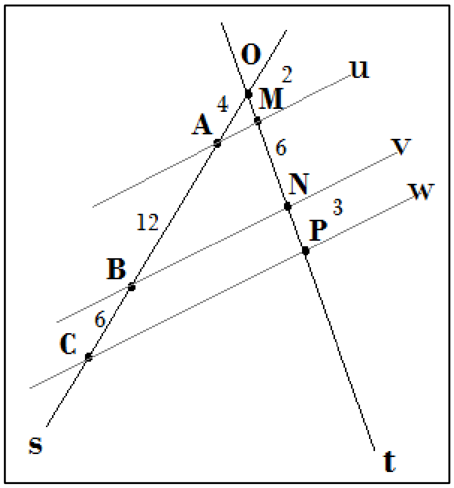
6.3. Encuentre la altura de un árbol, tomando en cuenta que la estatura de un hombre es de 1.8 m y a cierta hora de un día soleado su sombra de 1.2 m, y en ese mismo momento la sombra del árbol es de 3 m de longitud. Realiza el dibujo.

6.4. De forma general indica cual es el teorema de Thales, realiza un dibujo, escribe algunos ejemplos donde se pueda utilizar.

ACTIVIDAD EN GRUPO

7. (Triángulos semejantes). En la figura las dos rectas secantes (s, t) fueron cortadas por tres rectas paralelas (u, v, w). Se forman tres triángulos:

ΔAOM ΔBON ΔCOP



7.1. ¿Qué tienen en común los tres triángulos?

7.2. Qué puede decir sobre los ángulos:

$\measuredangle A$ $\measuredangle B$ $\measuredangle C$

7.3. Que pasa con los ángulos $\measuredangle M$ $\measuredangle N$ $\measuredangle P$

7.4. Completa la siguiente tabla con la información de la figura:

TRIANGULO	Lado recta s	Lado recta t	Razón
ΔAOM	$\overline{AO} =$	$\overline{MO} =$	$\frac{\overline{AO}}{\overline{MO}} =$
ΔBON			
ΔCOP			

7.5. ¿Qué puede concluir con los resultados de las razones entre los lados?

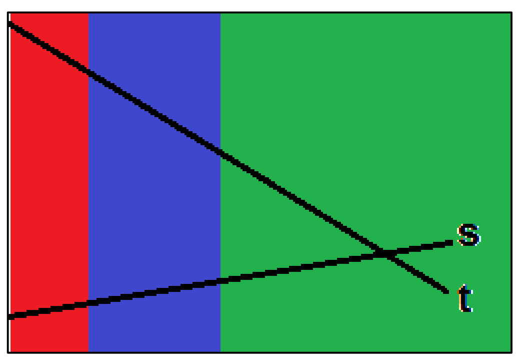
7.6. Forma tres proporciones con los resultados anteriores:

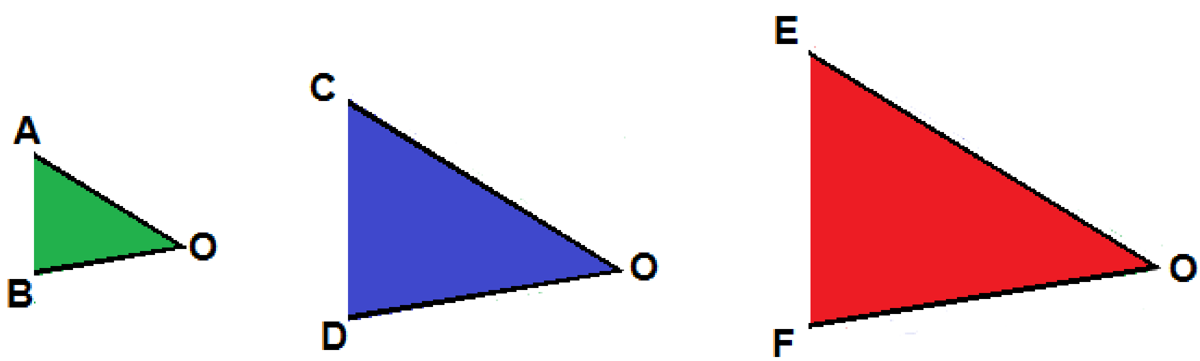
7.7. ¿Qué se puede concluir sobre los tres triángulos de acuerdo con los resultados anteriores?

ACTIVIDAD INDIVIDUAL

8. Practica triángulos semejantes.

- Tomar tres hojas de diferente color, colocar una sobre la otra dejando espacio entre ellas.
- Las hojas se deben sujetar con un gancho, luego traza dos rectas s y t sobre ellas.
- Recorta los triángulos por las líneas
- Nombra los vértices de cada triángulo
- Completa las siguientes tablas hallando la medida de cada lado y ángulo de los triángulos.





TRIANGULO VERDE		
ÁNGULO	LADO	RAZÓN
O=	OA=	OA:OB=
A=	OB=	OA:AB=
B=	AB=	OB:AB=

TRIANGULO AZUL		
ÁNGULO	LADO	RAZÓN
O=	OC=	OC:OD=
C=	OD=	OC:CD=
D=	CD=	OD:CD=

TRIANGULO ROJO		
ÁNGULO	LADO	RAZÓN
O=	OE=	OE:OF=
E=	OF=	OE:EF=
F=	EF=	OF:EF=

8.1. ¿Qué pasa con los ángulos de los tres triángulos?

8.2. ¿Qué paso con las razones de los lados de los triángulos? ¿Qué significa esto?

8.3. ¿Qué se puede concluir con respecto a los tres triángulos?

TRABAJO EN GRUPO

En grupos de tres estudiantes, van a socializar las soluciones y concluyen cada una. Escogen un líder del grupo quien explicará a los demás las conclusiones a las que llegaron.

ANEXO 9

Tabla 19.

Comportamientos esperados Secuencia Didáctica sobre Razones

ÍTEM	TIPO DE INTERACCIÓN	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Acción	Se espera que los estudiantes reconozcan el denominador de la fracción y al observar el dibujo indiquen que corresponde al número de partes en que se divide la figura (VMF-1)
1.2	Acción	Se espera que los estudiantes reconozcan como numerador el número de partes que se toman de la figura (VMF-1)
1.3	Acción	Se espera que los alumnos representen gráficamente la fracción, indiquen que se multiplico por dos el numerador y el denominador.
1.4	Acción	Se espera que los estudiantes recuerden que son fracciones equivalentes y multipliquen ambos términos de la fracción por el mismo número.
2.1	Acción	Se espera que los estudiantes multipliquen el valor del computador por 5 y el resultado lo dividan entre 8. (s. $1.275.000) (VMF-2).
2.2	Acción	Se espera que los estudiantes diferencien las dos interpretaciones de las fracciones, la primera como parte-todo y la segunda como operador.
2.3	Acción	Se espera que los estudiantes encuentren una relación con las dos interpretaciones de la fracción, como dividir el precio del computador en ocho partes iguales y tomar cinco. Es posible que los estudiantes tengan dificultades para establecer esta relación.

3.1	Formulación	Se espera que los estudiantes multipliquen el número de estudiantes por 5 y dividan el resultado entre 8 y luego deduzcan el número de mujeres (VMF-2).
3.2	Formulación	Se espera que los estudiantes indiquen que se multiplicaron los dos términos de la fracción por 3, o que una fracción es múltiplo de otra.
3.3	Formulación	Se espera que los estudiantes deduzcan que el numerador corresponde al total de hombres y el denominador al total de estudiantes (VMR). Es posible que los estudiantes presenten dificultad para establecer el significado.
3.4	Formulación	Se espera que los estudiantes deduzcan que por cada 8 estudiantes hay 5 hombres (VMR).
3.5	Formulación	Se espera que los estudiantes escriban la razón $\frac{9}{24}$ (VMR).
3.6	Formulación	Se espera que los estudiantes indiquen: • Ítem 1: en la fracción el denominador representa las partes en que se divide la unidad y el numerador las partes que se toman (VMF-1). • Ítem 2: la fracción se utiliza como operador, se multiplica el valor por el numerador y el resultado se divide por el denominador (VMF-2). • Ítem 3: La fracción representa una razón, donde se relacionan el total de estudiantes con el número de hombres o mujeres (VMR). Es posible que los estudiantes presenten dificultad para establecer estas interpretaciones.
4.1	Acción	Se espera que los estudiantes contesten el ítem a)

		comparación de dos cantidades.
4.2a	Acción	Se espera que los estudiantes escriban $\frac{4}{10}$ (VMR)
4.2b	Acción	Se espera que los estudiantes escriban $\frac{4}{6}$ (VMR)
4.2c	Acción	Se espera que los estudiantes deduzcan de la fracción $\frac{12}{20}$ que de un total de 20 preguntas, 12 se contestaron correctamente (VMR). Es posible que los estudiantes tengan dificultades para encontrar el significado a las razones.
4.2d	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen que son fracciones equivalentes, o que se multiplicaron ambos términos de la fracción $\frac{6}{10}$ por 2 y 3.
4.3a	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la razón $\frac{30}{6}$ (VMR).
4.3b	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la razón $\frac{30}{36}$ (VMR).
4.3c	Acción	Se espera que los estudiantes deduzcan en la razón $\frac{1}{6}$ que por cada 6 personas encuestadas 1 no sabe nadar. La relación con la fracción $\frac{7}{42}$ consiste en multiplicar cada término de la primera por 7.

		Es posible que los estudiantes presenten dificultad para relacionas los términos de las razones.
5.1	Acción	Se espera que los estudiantes den un significado al concepto de razón partiendo de la comparación entre sus términos.
5.2	Acción	Se espera que los estudiantes deduzcan la relación entre los términos de una razón, teniendo en cuenta las actividades anteriores indiquen que el numerador y denominador deben estar relacionados por la misma unidad de medida.
5	Validación	En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de razón: • Una razón es una relación entre dos cantidades. • Una razón es una división entre dos valores.
5	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de razón: Una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente. La razón entre a y b, cuando b es un número distinto de cero se escribe : $\frac{a}{b}$ o $a : b$ y se lee « a es a b »
Producto de la secuencia:		En el desarrollo de la secuencia didáctica de razones quedan los siguientes productos: • Presentación en PowerPoint sobre el concepto y ejemplos de razón. • Guía de la secuencia didáctica realizada con los estudiantes. • Plantilla en Excel sobre razones. • Documento del análisis a priori

Fuente: Elaboración propia

Tabla 20.

Comportamientos esperados Secuencia sobre Proporciones

ÍTEM	TIPO DE INTERACCIÓN	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{8}{10}=\frac{12}{x}$ (VMP-1).
1.2	Acción	Se espera que los alumnos identifiquen el término desconocido e indiquen cuantos bananos se necesitan para hacer una torta para 10 personas (VMR).
1.3	Acción	Se espera que los estudiantes calculen el valor desconocido en la proporción (s. 15 bananos) (VMP-2). Es posible que los estudiantes tengan dificultad para calcular el valor de la variable x.
2.1	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{20}{50}=\frac{12}{x}$ y la solucionen x=30 kg de queso (VMP-1, VMP-2, VMP-3d).
2.2	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{1200}{x}=\frac{3}{8}$ y la solucionen x= \$3.200 (VMP-1, VMP-2, VMP-3d).
2.3	Acción	Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{14000}{x}=\frac{5}{22}$ y la solucionen x= \$61.600 (VMP-1, VMP-2, VMP-3d).

3.1	Formulación	Se espera que los estudiantes calculen el valor desconocido en la proporción (s. 15, VMP-2).
3.2	Formulación	Se espera que los estudiantes calculen el valor desconocido en la proporción (s. 12, VMP-2).
3.3	Formulación	Se espera que los alumnos deduzcan un significado para el concepto de proporción y lo reconozcan como una igualdad entre dos razones (VMP-1).
3	Validación	En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de proporción: • Una proporción es una igualdad entre dos razones
3	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de razón: Una proporción es una igualdad entre dos o más razones y se escribe: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ o a:b = c:d, con b,d≠0 Los términos a y d reciben el nombre de **extremos** y los términos b y c reciben el nombre de **medios**. Propiedad fundamental de las proporciones: En toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. Simbólicamente, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces a.d = b.c
4.1	Acción	Se espera que los estudiantes reconozcan que en la medida que aumentan los litros de leche aumentan los kg de queso (VMP-3d).

4.2	Acción	Se espera que los estudiantes escriban una razón como: $\frac{10}{6}$, por cada 10 litros de leche se hacen 6 kilos de queso (VMR).
4.3	Acción	Se espera que los estudiantes escriban una proporción como: $\frac{10}{20}=\frac{6}{12}$ (VMP-1).
4.4	Acción	Se espera que los estudiantes después de analizar la información presentada, escriban que sí se puede representar los datos por medio de esa gráfica (VMP-4d). Es posible que los estudiantes tengan dificultad para explicar la razón por la cual los datos de la tabla se pueden representar con la gráfica de una línea recta.
4.5	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{10}{25}=\frac{6}{x}$ y hallen su solución (s. 15 kg queso, VMP-1, VMP-2, VMP-3d).
4.6	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{10}{x}=\frac{6}{45}$ y hallen su solución (s. 75 l leche, VMP-1, VMP-2, VMP-3d).
4.7	Acción	Se espera que los estudiantes determinen la constante de proporcionalidad con el cociente $\frac{6}{10}$, la pueden utilizar para calcular kg, de queso a partir de los litros de leche. Es posible que los alumnos tengan dificultad para calcular la constante de proporcionalidad e indiquen su aplicación.

<table>
<tr><td>5.1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes determinen la constante de proporcionalidad con el cociente $\frac{3500}{5}$=700. (VMP-3d).</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes calculen todos los cocientes y determinen que los datos sí representan magnitudes directamente proporcionales (VMP-3d).</td></tr>
<tr><td>5.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes representen correctamente los datos de la tabla por medio de la gráfica (VMP-4d).
Es posible que los alumnos tengan dificultad para realizar la gráfica, al definir la escala en los ejes horizontal y vertical.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad y completen la tabla, o establezcan las proporciones adecuadas y calculen los datos faltantes (VMP-1, VMP-2, VMP-3d).
<table><tr><td>Tiempo (hrs)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>Distancia (km)</td><td>30</td><td>60</td><td>90</td><td>120</td></tr></table>
Es posible que los alumnos tengan dificultad para establecer las proporciones y completar los datos de la tabla.</td></tr>
<tr><td>6.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad por medio del cociente $\frac{60}{4}$ =15</td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes representen correctamente los datos de la tabla por medio de la gráfica (VMP-4d).</td></tr>
</table>

6.3	Formulación	Se espera que los estudiantes deduzcan de la razón $\frac{4}{60}$ que por cada 4 horas se recorren 60 km (VMR).
6	Validación	En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de magnitudes directamente proporcionales: • Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando crecen de forma constante.
6	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de magnitudes directamente proporcionales: Dos magnitudes son directamente proporcionales, cuando al comparar las medidas que se corresponden de dichas magnitudes, se obtiene una razón constante. Si x es la medida de la magnitud A, y es la medida de la magnitud B, se dice que A es directamente proporcional a B si $\frac{y}{x}=k$, donde k es la constante de proporcionalidad.
7.1	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen que al aumentar los obreros, los días de trabajo disminuyen (VMP-3i).
7.2	Acción	Se espera que los estudiantes escriban $\frac{1}{30}$, un trabajador realiza el trabajo en 30 días (VMR).
7.3	Acción	Se espera que los estudiantes escriban una proporción como $\frac{30}{2}=\frac{15}{1}$ (VMP-1, VMP-3i). Es posible que los alumnos tengan dificultad al establecer las

		razones y hallar las proporciones, pueden escribir algo así: $\frac{30}{1}=\frac{15}{2}$.
7.4	Acción	Se espera que los estudiantes contesten que sí es posible representar los datos de la tabla por medio del grafico (VMP-4i). Es posible que los estudiantes tengan dificultad al indicar el motivo por el cual el grafico es una curva.
7.5	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{1}{10}=\frac{x}{30}$ y hallen su solución (s. 3 días, VMP-1, VMP-2, VMP-3i). Es posible que los alumnos tengan dificultad para escribir la proporción y coloquen algo como $\frac{1}{30}=\frac{10}{x}$.
7.6	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{1}{x}=\frac{20}{30}$ y hallen su solución (s. 1,5 VMP-1, VMP-2, VMP-3i). Es posible que los alumnos tengan dificultad para escribir la proporción y coloquen algo como $\frac{1}{30}=\frac{x}{20}$, también tengan problema con interpretar el resultado.
7.7	Acción	Se espera que los estudiantes determinen la constante de proporcionalidad con el producto 1x30, lo pueden utilizar para calcular el número de días trabajados a partir del número de obreros. Es posible que los alumnos tengan dificultad para calcular la constante de proporcionalidad e indiquen su aplicación.

<table>
<tr><td>8.1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes determinen la constante de proporcionalidad con el producto 1x400. (VMP-3i).</td></tr>
<tr><td>8.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes calculen todos los productos y determinen que los datos sí representan magnitudes inversamente proporcionales (VMP-3i).</td></tr>
<tr><td>8.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes representen correctamente los datos de la tabla por medio de la gráfica (VMP-4i).
Es posible que los alumnos tengan dificultad para realizar la gráfica, al definir la escala en los ejes horizontal y vertical.</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad y completen la tabla, o establezcan las proporciones adecuadas y calculen los datos faltantes (VMP-1, VMP-2, VMP-3i).
<table>
<tr><td>No. Pintores</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Tiempo (días)</td><td>24</td><td>12</td><td>8</td><td>6</td><td>4,8</td></tr>
</table>
Es posible que los alumnos tengan dificultad para establecer las proporciones y completar los datos de la tabla.</td></tr>
<tr><td>9.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad por medio del producto 2x24=48.</td></tr>
<tr><td>9.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes representen correctamente los datos de la tabla por medio de la gráfica (VMP-4i).
Es posible que los estudiantes tengan dificultan al establecer la escala en los ejes horizontal y vertical.</td></tr>
<tr><td>9.3</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes deduzcan de la razón $\frac{2}{24}$ que</td></tr>
</table>

		para 24 días de trabajo se requieren 2 pintores (VMR).
9	Validación	En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de magnitudes inversamente proporcionales: • Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando una crece y la otra disminuye de forma constante.
9	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de magnitudes inversamente proporcionales: Dos magnitudes son inversamente proporcionales, cuando el producto de las medidas que se corresponden de dichas magnitudes, es constante. Si x es la medida de la magnitud A, y es la medida de la magnitud B, se dice que A y B son inversamente proporcionales si $x.y = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.
Producto de la secuencia:		En el desarrollo de la secuencia didáctica de proporciones quedan los siguientes productos: • Presentación en PowerPoint sobre el concepto y ejemplos de proporción. • Guía de la secuencia didáctica realizada con los estudiantes. • Plantilla en Excel sobre proporciones. • Documento del análisis a priori • Carteleras con graficas de magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 21.

Comportamientos esperados Secuencia Didáctica sobre Proporcionalidad

ÍTEM	TIPO DE INTERACCIÓN	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Acción	Se espera que los estudiantes establezcan que a medida que los metros de tela aumentan, también lo hace su valor (VMP-3d).
1.2	Acción	Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad $\frac{9.000}{2} = 4.500$.
1.3	Acción	Se espera que los estudiantes escriban magnitudes directamente proporcionales (VMP-3d).
1.4	Acción	Se espera que los estudiantes escriban una proporción como $\frac{2}{4} = \frac{9.000}{18.000}$ (VMP-1).
1.5	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{2}{6} = \frac{9.000}{x}$ y hallen su solución (s. \$27.000, VMP-1, VMP-2, VMP-3d, VMT-1d). También, utilicen la regla de tres directa para solucionar el problema: $\begin{array}{ccc} \textit{Metros tela} & & \text{Precio} \\ 2 & \rightarrow & \$9.000 \\ 6 & \rightarrow & x \end{array}$
1.6	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{5}{15} = \frac{22.000}{x}$ y hallen su solución (s. \$67.500, VMP-1, VMP-2, VMP-3d, VMT-1d).

		También utilicen la regla de tres directa para solucionar el problema: $$\begin{array}{ccc} \textit{Metros tela} & & \text{Pr}\textit{ecio} \\ 5 & \rightarrow & \$22.500 \\ 15 & \rightarrow & x \end{array}$$
1.7	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{12}{x}=\frac{54.000}{90.000}$ y hallen su solución (s. 20 metros, VMP-1, VMP-2, VMP-3d, VMT-1d). También, utilicen la regla de tres directa para solucionar el problema: $$\begin{array}{ccc} \textit{Metros tela} & & \text{Pr}\textit{ecio} \\ 12 & \rightarrow & \$54.000 \\ x & \rightarrow & \$90.000 \end{array}$$
1.8	Acción	Se espera que los estudiantes resuelvan la proporción (s. \$67.500) y deduzcan el procedimiento general para solucionar problemas de regla de tres simple directa: multiplicar los extremos o medios y dividir por el término faltante (VMP-2, VMT-1d).
2.1	Acción	Se espera que los estudiantes establezcan que a medida que aumenta la velocidad del automóvil, el tiempo utilizado disminuye (VMP-3i).
2.2	Acción	Se espera que los estudiantes calculen la constante de proporcionalidad 5x12 = 60.
2.3	Acción	Se espera que los estudiantes indiques magnitudes inversamente proporcionales (VMP-3i).
2.4	Acción	Se espera que los estudiantes escriban una proporción como $\frac{50}{60}=\frac{10}{12}$ (VMP-1).

		Es posible que los alumnos tengan dificultad para escribir la proporción y coloquen algo como: $\frac{50}{12}=\frac{60}{10}$.
2.5	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{50}{85}=\frac{x}{12}$ y hallen su solución (s. 7,05 horas, VMP-1, VMP-2, VMP-3i, VMT-1i). También, utilicen la regla de tres inversa para solucionar el problema: $\begin{array}{cc} \textit{Velocidad} & \textit{Tiempo horas} \\ 50 \to & 12 \\ 85 \to & x \end{array}$ Es posible que los estudiantes tengan dificultad para resolver este ejercicio y utilicen la regla de tres directa para su solución.
2.6	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{80}{120}=\frac{x}{7,5}$ y hallen su solución (s. 5 horas, VMP-1, VMP-2, VMP-3i, VMT-1i). También utilicen la regla de tres inversa para solucionar el problema: $\begin{array}{cc} \textit{Velocidad} & \textit{Tiempo horas} \\ 80 \to & 7,5 \\ 120 \to & x \end{array}$ Es posible que los estudiantes tengan dificultad para resolver este ejercicio y utilicen la regla de tres directa para su solución.
2.7	Acción	Se espera que los estudiantes identifiquen la proporción $\frac{100}{x}=\frac{4}{6}$ y hallen su solución (s. 150 km/h, VMP-1, VMP-2, VMP-3i, VMT-1i).

		También, utilicen la regla de tres inversa para solucionar el problema: $$\begin{array}{ccc} Velocidad & & Tiempo\ horas \\ 100 & \rightarrow & 6 \\ x & \rightarrow & 4 \end{array}$$ Es posible que los estudiantes tengan dificultad para resolver este ejercicio y utilicen la regla de tres directa para su solución.
2.8	Acción	Se espera que los estudiantes resuelvan la proporción (s. 4 horas) y deduzcan el procedimiento general para solucionar problemas de regla de tres simple inversa: multiplicar los dos términos superiores o inferiores y dividir por el término faltante (VMP-2, VMT-1i).
3.1	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen: magnitud inversamente proporcional, y expliquen que a medida que aumentan los cerdos disminuye el número de días que durará el concentrado (VMP-3i)
3.2	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen: magnitud directamente proporcional, y expliquen que entre más operarios, más metros cavaran de la zanja (VMP-3d).
3.3	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen: magnitud directamente proporcional, y expliquen que a medida que aumentan los litros de leche, aumentan los kilos de queso que se pueden preparar (VMP-3d).
3.4	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen: magnitud inversamente proporcional, y expliquen que entre más trabajadores, menos tiempo se necesita para enchuspar las matas de plátano (VMP-3i)

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes utilicen adecuadamente la regla de tres directa y completen la tabla (VMT-1d)
<table>
<tr><td>INGREDIENTES / No. DE PERSONAS</td><td>HARINA</td><td>AZÚCAR</td><td>MANTEQUILLA</td><td>HUEVOS</td><td>BANANOS</td><td>POLVO DE HORNEAR</td><td>ESENCIA DE BANANO</td></tr>
<tr><td>8</td><td>500 gramos</td><td>400 gramos</td><td>300 gramos</td><td>8</td><td>12</td><td>20 gramos</td><td>15 gramos</td></tr>
<tr><td>12</td><td>750</td><td>600</td><td>450</td><td>12</td><td>18</td><td>30</td><td>22,5</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes utilicen adecuadamente la regla de tres directa y completen la tabla (VMT-1d)
<table>
<tr><td>INGREDIENTES / No. DE PERSONAS</td><td>HARINA</td><td>AZÚCAR</td><td>MANTEQUILLA</td><td>HUEVOS</td><td>BANANOS</td><td>POLVO DE HORNEAR</td><td>ESENCIA DE BANANO</td></tr>
<tr><td>8</td><td>500 gramos</td><td>400 gramos</td><td>300 gramos</td><td>8</td><td>12</td><td>20 gramos</td><td>15 gramos</td></tr>
<tr><td>20</td><td>1250</td><td>1000</td><td>750</td><td>20</td><td>30</td><td>50</td><td>37,5</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes utilicen adecuadamente la regla de tres inversa y completen la tabla (VMT-1i)
<table>
<tr><td>TIEMPO (horas)</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>VELOCIDAD (km/h)</td><td>240</td><td>120</td><td>60</td><td>40</td><td>30</td><td>24</td><td>20</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Validación</td><td>En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de regla de tres simple:
La regla de tres directa se utiliza para magnitudes directamente proporcionales y la regla de tres inversa para magnitudes inversamente proporcionales.
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Institucionalización</td><td>En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de regla de tres simple:
La regla de tres simple es un procedimiento que permite encontrar un término desconocido en una proporción en la que intervienen dos magnitudes.
Si las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales, se llama regla de tres simple directa,</td></tr>
</table>

		para resolver un problema de este tipo se debe: • Se llama x a la cantidad desconocida y se elabora una tabla con las cantidades que intervienen. • Se plantea una proporción de acuerdo con la propiedad de las magnitudes directamente proporcionales. • Se encuentra el termino desconocido Si las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, se llama **regla de tres simple inversa,** para resolver un problema de este tipo se debe: Seguir un procedimiento similar al anterior con la diferencia que la proporción se plantea teniendo en cuenta la propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales, donde una de las razones se debe invertir.
Producto de la secuencia:		En el desarrollo de la secuencia didáctica de proporcionalidad quedan los siguientes productos: • Presentación en PowerPoint sobre el concepto y ejemplos de proporcionalidad. • Guía de la secuencia didáctica realizada con los estudiantes. • Plantilla en Excel sobre proporcionalidad. • Documento del análisis a priori • Fichas con problemas para aplicar la regla de tres directa e inversa.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 22.

Comportamientos esperados Secuencia Didáctica sobre Porcentajes

<table>
<tr><th>ÍTEM</th><th>TIPO DE INTERACCIÓN</th><th>COMPORTAMIENTOS ESPERADOS</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes completen la tabla
<table>
<tr><th>PORCENTAJE</th><th>CÓMO SE LEE</th><th>RAZÓN (operador)</th><th>EXPRESIÓN DECIMAL</th></tr>
<tr><td>30%</td><td>Treinta por ciento</td><td>$\frac{30}{100}$</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td>60%</td><td>Sesenta por ciento</td><td>$\frac{60}{100}$</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>25%</td><td>Veinticinco por ciento</td><td>$\frac{25}{100}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>7%</td><td>Siete por ciento</td><td>$\frac{7}{100}$</td><td>0,07</td></tr>
<tr><td>17%</td><td>Quince por ciento</td><td>$\frac{15}{100}$</td><td>0,15</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes por medio de la regla de tres directa hallen el porcentaje (s. 12,5%, VMT-1d, VMC-1).

$$\begin{array}{ccc} \textit{Mangos} & & \textit{Porcentaje} \\ 200 & \rightarrow & 100\% \\ 25 & \rightarrow & x \end{array}$$

Es posible que los alumnos tengan dificultades en establecer la regla de tres directa al relacionar los 200 mangos con el 100%.</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes por medio de la regla de tres directa hallen el porcentaje (s. 44,44%, VMT-1d, VMC-1).

$$\begin{array}{ccc} \textit{Estudiantes} & & \textit{Mujeres} \\ 90 & \rightarrow & 100\% \\ 40 & \rightarrow & x \end{array}$$

Es posible que los alumnos tengan dificultades en establecer la regla de tres directa al relacionar los 90 estudiantes con el 100%.</td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes por medio de la regla de tres directa hallen el porcentaje (s. 6,66%, VMT-1d, VMC-</td></tr>
</table>

		1). $$\begin{array}{ccc} Pla\tan os & & Porcentaje \\ 120 & \rightarrow & 100\% \\ 8 & \rightarrow & x \end{array}$$ Es posible que los alumnos tengan dificultades en establecer la regla de tres directa al relacionar los 120 plátanos con el 100%.
2.4	Acción	Se espere que los estudiantes deduzcan el procedimiento general para calcular los porcentajes: el total de datos corresponde al 100% y se utiliza la regla de tres directa para calcular el porcentaje pedido (VMT-1d, VMC-1).
2.5	Acción	Se espera que los estudiantes escriban regla de tres simple directa.
3.1	Acción	Se espera que los estudiantes multipliquen 500 por 20% y dividan el resultado por 100% (s. 100, VMC-1).
3.2	Acción	Se espera que los estudiantes multipliquen 2.000.000 por 0,75% y dividan el resultado por 100% (s. 15.000, VMC-1).
3.3	Acción	Se espere que los estudiantes deduzcan el procedimiento general para calcular los porcentajes: multiplican el valor por el porcentaje dado y el resultado lo dividen por 100% (VMC-1).
3.4	Acción	Se espera que los estudiantes multipliquen 15.000 por el 25% y el resultado se lo sumen a 15.000 (s. 18.750, VMC-1, VMC-2) Es posible que los alumnos tengan dificultades con este ejercicio y no realicen la suma del valor hallado.

<table>
<tr><td>3.5</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes multipliquen 22.000 por el 30% y el resultado se lo resten a 22.000 (s. 15.400, VMC-1, VMC-3)
Es posible que los alumnos tengan dificultades con este ejercicio y no realicen la resta del valor hallado.</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de camiseta por el porcentaje y luego realicen el descuento (s. $38.400, VMC-1, VMC-3)</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de la almohada por el porcentaje y realicen el descuento (s. $21.600, VMC-1, VMC-3)</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes multipliquen el valor de los zapatos por el porcentaje y luego sumen el total del impuesto (s. $190.400, VMC-1, VMC-2).</td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes multipliquen el valor del sueldo por el porcentaje y luego sumen el total del bono de alimentación (s. $1.380.000, VMC-1, VMC-2).</td></tr>
<tr><td>5.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes completen la tabla al calcular el porcentaje y sumarlo al sueldo de cada mes (VMC-1, VMC-2)<table><tr><th>ENERO</th><th>FEBRERO</th><th>MARZO</th><th>ABRIL</th><th>MAYO</th><th>JUNIO</th></tr><tr><td>$900.000</td><td>$ 927.000</td><td>$954.810</td><td>$ 983.454</td><td>$1.012.957</td><td>$1.043.346</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes expliquen el procedimiento para realizar la actividad anterior. Calculan el porcentaje de cada mes y se lo suman al sueldo</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Validación</td><td>En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de porcentajes:</td></tr>
</table>

		• Un porcentaje consiste en dividir una cantidad por 100.
5	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de porcentajes: Se llama porcentaje o tanto por ciento a todas aquellas razones en las que el consecuente es 100. Se representa con el signo %, que significa por cada cien. Concretamente, un porcentaje es una fracción pero cuyo denominador es siempre 100.
Producto de la secuencia:		En el desarrollo de la secuencia didáctica de porcentajes quedan los siguientes productos: • Presentación en PowerPoint sobre el concepto y ejemplos de porcentajes. • Guía de la secuencia didáctica realizada con los estudiantes. • Plantilla en Excel sobre porcentajes. • Documento del análisis a priori • Tablas con ejemplos y ejercicios de porcentajes

Fuente: Elaboración propia

Tabla 23.

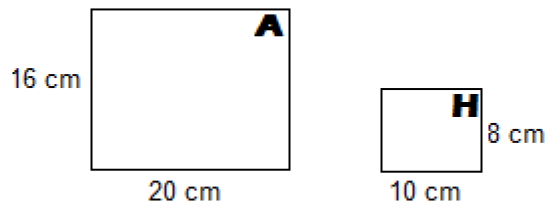
Comportamientos esperados Secuencia Didáctica sobre Proporcional Geométrica

ÍTEM	TIPO DE INTERACCIÓN	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Acción	Se espera que los estudiantes calculen la razón entre las medidas de las longitudes de los segmentos (s. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, VMG-RS).

<table>
<tr><td>1.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes dibujen los dos pares de segmentos y calculen la razón entre las medidas de sus longitudes (s. $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ VMG-RS).</td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$ (VMG-PS).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes dibujen el segmento, escriban la proporción $\frac{6}{10}=\frac{x}{15}$ y calculen el valor desconocido (s. 9 cm, VMG-PS).</td></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes encuentren las parejas de rectángulos semejantes y completen la tabla (VMG-SF)
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th><th>J</th></tr>
<tr><td>LARGO</td><td>20</td><td>10</td><td>6</td><td>16</td><td>16</td><td>15</td><td>8</td><td>10</td><td>18</td><td>24</td></tr>
<tr><td>ANCHO</td><td>16</td><td>6</td><td>4</td><td>10</td><td>16</td><td>9</td><td>8</td><td>8</td><td>12</td><td>15</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes establezcan todas las razones entre las medidas de las longitudes del largo y ancho de los rectángulos (VMG-RS)
<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th><th>H</th><th>I</th><th>J</th></tr>
<tr><td>RAZÓN
largo/ancho</td><td>$\frac{5}{4}$</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{8}{5}$</td><td>$\frac{1}{1}$</td><td>$\frac{5}{3}$</td><td>$\frac{1}{1}$</td><td>$\frac{5}{4}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{8}{5}$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes deduzcan que las parejas agrupadas tienen la misma razón entre las medidas de las longitudes de sus lados (VMG-RS)</td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes formen las proporciones teniendo en cuenta las razones de la tabla anterior (VMG-</td></tr>
</table>

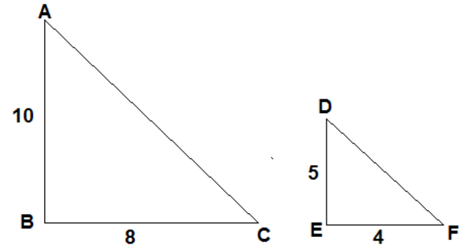
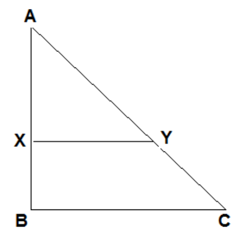
<table>
<tr><td></td><td></td><td>PS)
<table>
<tr><th>RECTÁNGULOS</th><th>A - H</th><th>F - B</th><th>I - C</th><th>E - G</th><th>J - D</th></tr>
<tr><td>PROPORCIÓN</td><td>$\frac{20}{16}=\frac{10}{8}$</td><td>$\frac{15}{9}=\frac{10}{6}$</td><td>$\frac{18}{12}=\frac{6}{4}$</td><td>$\frac{16}{16}=\frac{8}{8}$</td><td>$\frac{24}{15}=\frac{16}{10}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes encuentren una razón equivalente, formen la proporción $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ y dibujen el rectángulo semejante (VMG-RS, VMG-PS, VMG-SF).</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes escriban las razones y las simplifiquen
$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}}=\frac{2}{1}$ $\frac{\overline{OB}}{\overline{ON}}=\frac{2}{1}$
$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}=\frac{2}{1}$ $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{2}{1}$
$\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}}=\frac{2}{1}$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}=\frac{2}{1}$</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes deduzcan que los segmentos formados son proporcionales al tener la misma razón (VMG-RS)</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes escriban constante de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes deduzcan que las rectas son paralelas.</td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes escriban proporciones entre las medidas de los segmentos formados por las rectas paralelas $\frac{4}{2}=\frac{16}{8}$ (VMG-PS).</td></tr>
</table>

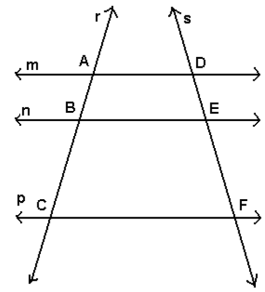
<table>
<tr><td>5.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes escriban la proporción $\frac{x}{24}=\frac{6}{8}$
y hallen su solución (s. 18, VMG-PS, VMG-T).
Es posible que los estudiantes tengan dificultan al establecer la proporción entre la medida de los segmentos.</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes escriban las proporciones entre las medidas de los segmentos y completen la tabla (VMG-PS, VMG-T)
<table>
<tr><td>AB</td><td>12</td><td></td><td>14</td><td></td></tr>
<tr><td>BC</td><td>4</td><td>10</td><td>21</td><td>8</td></tr>
<tr><td>AC</td><td></td><td>25</td><td></td><td>24</td></tr>
<tr><td>DE</td><td>15</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>EF</td><td></td><td></td><td>25,2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>DF</td><td>20</td><td>25</td><td>42</td><td>36</td></tr>
</table>
Es posible que los estudiantes tengan dificultad al escribir las proporciones y hallar su solución.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Validación</td><td>En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre los conceptos de proporcionalidad de segmentos y semejanza:
• Los segmentos son proporcionales cuando al dividirlos dan el mismo resultado.
• Las figuras semejantes son las que tienen la misma forma pero diferente medida</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Institucionalización</td><td>En esta fase de la TSD se formalizan los conceptos de proporcionalidad de segmentos y semejanza:
Segmentos proporcionales entre rectángulos: cuando se divide la medida de un lado de un rectángulo entre la medida del lado correspondiente del otro rectángulo, el número es el mismo, es decir, es constante en todos los lados del rectángulo y este número es la razón de semejanza.</td></tr>
</table>

		Semejanza de figuras: dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, pero diferente tamaño, es decir, sus lados correspondientes son proporcionales de acuerdo a una constante de proporcionalidad.  Proporción entre las medidas de los lados correspondientes de los rectángulos: $\frac{16}{8} = \frac{20}{10}$ entonces 16.10 = 8.20
6.1	Acción	Se espera que los estudiantes tomen bien las medidas de las sombras de la silla y el poste, establezcan la proporción y calculen la altura del poste (VMG-PS, VMG-T). Es posible que los estudiantes tengan dificultad al establecer la proporción y hallar la solución.
6.2	Acción	Se espera que los estudiantes realicen y ubiquen adecuadamente los datos en el dibujo, establezcan la proporción y la solucionen $\frac{x}{6} = \frac{1,8}{4}$ (s. 2,7 m, VMG-PS, VMG-T). Es posible que los alumnos tengan dificultad al establecer la proporción y solucionarla.
6.3	Acción	Se espera que los estudiantes realicen y ubiquen adecuadamente los datos en el dibujo, establezcan la

<table>
<tr><td></td><td></td><td>proporción y la solucionen $\frac{x}{1{,}8}=\frac{3}{1{,}2}$ (s. 4,5 m, VMG-PS, VMG-T).
Es posible que los alumnos tengan dificultad al establecer la proporción y solucionarla.</td></tr>
<tr><td>6.4</td><td>Acción</td><td>Se espera que los estudiantes por medio de los ejercicios anteriores deduzcan un enunciado sobre el teorema de Thales, realicen un dibujo y un ejemplo sobre el tema.
Es posible que los estudiantes tengan dificultad al escribir una forma general del teorema de Thales.</td></tr>
<tr><td>7.1</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes escriban que tienen en común el vértice O y que los triángulos están entre rectas paralelas.
Es posible que solo escriban que tienen en común el vértice O.</td></tr>
<tr><td>7.2</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes escriban que los ángulos tienen la misma medida.</td></tr>
<tr><td>7.3</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes escriban que los ángulos tienen la misma medida.</td></tr>
<tr><td>7.4</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes completen la tabla con la información de la figura (VMG-RS)
<table>
<tr><th>TRIANGULO</th><th>Lado recta s</th><th>Lado recta t</th><th>Razón</th></tr>
<tr><td>ΔAOM</td><td>$\overline{AO}=4$</td><td>$\overline{MO}=2$</td><td>$\frac{\overline{AO}}{\overline{MO}}=\frac{4}{2}$</td></tr>
<tr><td>ΔBON</td><td>$\overline{BO}=16$</td><td>$\overline{NO}=8$</td><td>$\frac{\overline{BO}}{\overline{NO}}=\frac{16}{8}$</td></tr>
<tr><td>ΔCOP</td><td>$\overline{CO}=22$</td><td>$\overline{PO}=11$</td><td>$\frac{\overline{CO}}{\overline{PO}}=\frac{22}{11}$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>7.5</td><td>Formulación</td><td>Se espera que los estudiantes lleguen al mismo resultado al simplificar las razones y deduzcan que los segmentos son</td></tr>
</table>

		proporcionales. Es posible que los estudiantes solo escriban que las razones son iguales.
7.6	Formulación	Se espera que los estudiantes escriban las proporciones con las razones dadas $\frac{4}{2}=\frac{16}{8}$ (VMG-PS)
7.7	Formulación	Se espera que los estudiantes escriban que los lados de los triángulos correspondientes son proporcionales o que los triángulos son semejantes (VMG-SF).
8	Acción	Se espera que los estudiantes recorten los triángulos, hallen las medidas de sus lados, completen las tablas y formen las razones (VMG-RS).
8.1	Acción	Se espera que los estudiantes concluyan que las medidas de los ángulos son iguales.
8.2	Acción	Se espera que los estudiantes indiquen que las razones son iguales y deduzcan que los lados correspondientes son proporcionales (VMG-SF).
8.3	Acción	Se espera que los estudiantes deduzcan que los triángulos son semejantes.
8	Validación	En esta fase de la TSD los estudiantes concluyen sobre el concepto de proporcionalidad de segmentos y Teorema de Thales: • Al dividir los lados correspondientes de dos triángulos sus resultados son el mismo.

		 $$\frac{10}{5}=\frac{8}{4}$$
8	Institucionalización	En esta fase de la TSD se formaliza el concepto de Teorema de Thales: 1. Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.  Proporción entre las medidas de los lados correspondientes de los triángulos: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{YC}}$$ 2. Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

		 Proporción entre las medidas de los lados correspondientes de las rectas paralelas: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$
Producto de la secuencia:		En el desarrollo de la secuencia didáctica de proporcionalidad geométrica quedan los siguientes productos: • Presentación en PowerPoint sobre el concepto y ejemplos de proporcionalidad geométrica. • Guía de la secuencia didáctica realizada con los estudiantes. • Guía de trabajo de proporcionalidad entre segmentos. • Plantilla en Excel sobre proporcionalidad geométrica. • Documento del análisis a priori • Fichas de semejanza de figuras con rectángulos y triángulos.

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 10

Tabla 24.

Información complementaria de las Secuencias Didácticas

INSTRUMENTO	DESCRIPCIÓN
Actividad es exploración	• 9 preguntas • Se consideraron algunos temas que los estudiantes trabajaron en años anteriores • Trabajo individual • Se reforzaron conocimientos previos
Recapitulaciones	• Recapitulación 1: Lo realiza el docente al inicio de la secuencia didáctica sobre proporciones, repasando y complementando lo visto en la secuencia didáctica sobre razones. • Recapitulación 2: Lo realiza el docente al inicio de la secuencia didáctica sobre proporcionalidad, repasando y complementando lo visto en la secuencia didáctica sobre proporciones. • Recapitulación 3: Lo realiza el docente al inicio de la secuencia didáctica sobre porcentajes, repasando y complementando lo visto en la secuencia didáctica sobre proporcionalidad. • Recapitulación 4: Lo realiza el docente al inicio de la secuencia didáctica sobre proporcionalidad geométrica, repasando y complementando lo visto en la secuencia didáctica sobre porcentajes. • Recapitulación 5: Lo realiza el docente para retomar el tema de proporcionalidad geométrica después de un receso estudiantil.

	• Recapitulación 6: Lo realiza el docente posterior a la secuencia didáctica de proporcionalidad geométrica, complementando lo trabajado en esta secuencia.
Prueba final	Prueba que contiene preguntas iguales a la actividad de exploración, para observar si las actividades de aprendizaje ayudaron a superar las deficiencias encontradas inicialmente.

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 11

Tabla 25.

Programación de Actividades

SECCIÓN	ACTIVIDAD	FORMA DE TRABAJO	DURACIÓN (minutos)
1	Actividad inicial de exploración	Individual	60 minutos
2	Secuencia Didáctica Razones	Docente (Instrucciones) Parte 1: Individual Parte 2: Individual Parte 3: Grupal Parte 4: Grupal	20 minutos 40 minutos 60 minutos 60 minutos 60 minutos
3	Recapitulación 1 Secuencia Didáctica Proporciones	Docente al inicio de las actividades Parte 1: Individual Parte 2: Individual Parte 3: Individual Parte 4: Grupal Parte 5: Grupal	20 minutos 40 minutos 60 minutos 60 minutos 60 minutos 60 minutos
4	Recapitulación 2 Secuencia Didáctica Proporcionalidad	Docente al inicio de las actividades Parte 1: Individual Parte 2: Individual Parte 3: Grupal Parte 4: Grupal	20 minutos 40 minutos 60 minutos 60 minutos 60 minutos
5	Recapitulación 3 Secuencia Didáctica porcentajes	Docente al inicio de las actividades Parte 1: Individual Parte 2: Individual Parte 3: Grupal	20 minutos 40 minutos 60 minutos 60 minutos

		Parte 4: Grupal	60 minutos
6	Recapitulación 4 Secuencia Didáctica Proporcionalidad Geométrica Recapitulación 5	Docente al inicio de las actividades Parte 1: Individual (actividad manual) Docente luego del receso Parte 2: Individual Parte 3: Individual (actividad manual) Parte 4: Grupal Parte 5: Grupal	20 minutos 40 minutos 20 minutos 40 minutos 60 minutos 60 minutos 60 minutos
7	Recapitulación 6 Prueba Final	Docente al inicio de la prueba Individual	30 minutos 60 minutos

Fuente: Elaboración propia

ANEXO 12

Tabla 26.

Cronograma de Actividades

ACTIVIDAD	FECHA	HORA
Actividad inicial de exploración	15 de marzo de 2017	8:40 am – 9:40 am
Secuencia Didáctica Razones		
Parte 1	22 de marzo de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 2	23 de marzo de 2017	6:40 am – 7:40 am
Parte 3	27 de marzo de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 4	29 de marzo de 2017	8:40 am – 9:40 am
Secuencia Didáctica Proporciones		
Parte 1	30 de marzo de 2017	6:40 am – 7:40 am
Parte 2	3 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 3	5 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 4	6 de abril de 2017	6:40 am – 7:40 am
Parte 5	17 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Secuencia Didáctica Proporcionalidad		
Parte 1	19 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 2	20 de abril de 2017	6:40 am – 7:40 am
Parte 3	24 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Parte 4	26 de abril de 2017	8:40 am – 9:40 am
Secuencia Didáctica Porcentajes		

Parte 1 Parte 2 Parte 3 Parte 4	27 de abril de 2017 3 de mayo de 2017 4 de mayo de 2017 8 de mayo de 2017	6:40 am – 7:40 am 8:40 am – 9:40 am 6:40 am – 7:40 am 8:40 am – 9:40 am
Secuencia Didáctica Proporcionalidad Geométrica Parte 1 Parte 2 Parte 3 Parte 4 Parte 5	 11 de mayo de 2017 5 de julio de 2017 6 de julio de 2017 10 de julio de 2017 12 de julio de 2017	 6:40 am – 7:40 am 8:40 am – 9:40 am 6:40 am – 7:40 am 8:40 am – 9:40 am 8:40 am – 9:40 am
Prueba Final	17 de julio de 2017	8:40 am – 9:10 am 10:00 am – 11:00 am

ANEXO 13

Tabla 27.

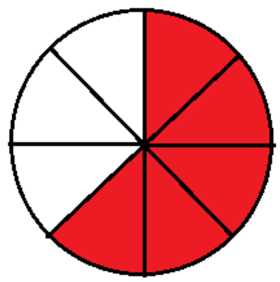
Calificación cuantitativa de la secuencia Didáctica sobre Razones Individual y Grupal

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1.1	12	54,55	1	4,55	8	36,36	1	4,55
1.2	16	72,73	1	4,55	4	18,18	1	4,55
1.3	8	36,36	5	22,73	9	40,91	0	0,00
1.4	6	27,27	16	72,73	0	0,00	0	0,00
2.1	10	45,45	7	31,82	1	4,55	4	18,18
2.2	1	4,55	9	40,91	10	45,45	2	9,09
2.3	2	9,09	13	59,09	6	27,27	1	4,55
3.1 Grupo	3	42,86	3	42,86	1	14,29	0	0,00
3.2 Grupo	4	57,14	1	14,29	2	28,57	0	0,00
3.3 Grupo	0	0,00	2	28,57	4	57,14	1	14,29
3.4 Grupo	0	0,00	4	57,14	2	28,57	1	14,29
3.5 Grupo	3	42,86	3	42,86	1	14,29	0	0,00
3.6 Grupo	0	0,00	4	57,14	2	28,57	1	14,29
4.1	11	50,00	8	36,36	0	0,00	3	13,64
4.2ª	11	50,00	6	27,27	2	9,09	3	13,64
4.2b	8	36,36	10	45,45	0	0,00	4	18,18
4.2c	2	9,09	9	40,91	5	22,73	6	27,27
4.2d	5	22,73	5	22,73	8	36,36	4	18,18
4.3ª	2	9,09	11	50,00	3	13,64	6	27,27
4.3b	8	36,36	5	22,73	1	4,55	8	36,36
4.3c	5	22,73	5	22,73	4	18,18	8	36,36
5.1	6	27,27	8	36,36	3	13,64	5	22,73
5.2	0	0,00	12	54,55	2	9,09	8	36,36

La secuencia didáctica sobre Razones se inicia con 22 alumnos, se dan las indicaciones iniciales de la forma de trabajo individual y grupal; para el trabajo grupal se forman seis grupos de tres estudiantes y un grupo de cuatro. El desarrollo de la secuencia cuenta con cinco ítems, cuatro para trabajar individual y uno en grupo. Se divide el trabajo en cuatro partes, cada parte de una hora, en las primeras dos horas trabajan individual para realizar la primera fase de la ingeniería, en las siguientes dos horas trabajan en grupo para efectuar las fases de validación, formulación e institucionalización entre estudiantes y el docente. En las situaciones planteadas se pone énfasis en las variables microdidácticas VMF-1, VMF-2 y VMR.

Actividad Individual

1) La fracción que representa el dibujo es $\frac{5}{8}$



Responde:

1.1) ¿Qué significa el denominador?

1.2) ¿Qué significa el numerador?

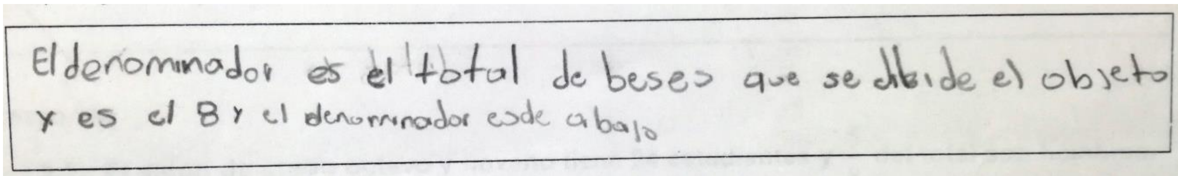
1.3) Si tuviera la fracción $\frac{10}{16}$, ¿Cómo la representaría? ¿Qué relación encuentra con la fracción anterior?

1.4) Escribe otra fracción que se relacione con las dos anteriores

Ítem 1.1)

El 54,55% de los estudiantes contestaron correctamente, el 36,36% tienen idea pero les falto precisión en su significado.

La mayoría de los estudiantes comprenden lo que significa el denominador de una fracción cuando se tiene la interpretación parte-todo. Un estudiante no contesto bien, coloco como resultado *el número de fracciones* y otro dejo en blanco ese punto, no diferenció el numerador del denominador.



El denominador es el total de beses que se dibide el objeto y es el 8 y el denominador esde abajo

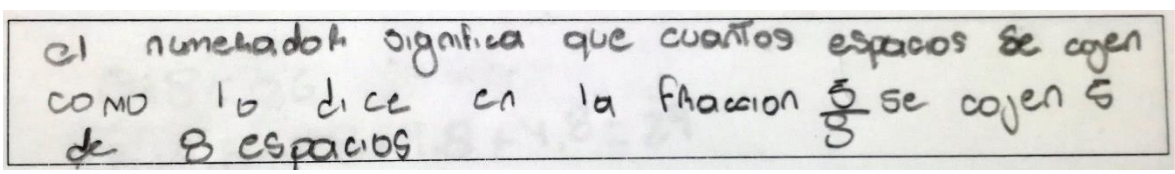
Gráfico 28. Respuesta a la situación 2, ítem 1.1

En la figura se observa el procedimiento correcto que hicieron 12 estudiantes para resolver esa pregunta, muchos de ellos manifestaron que las preguntas eran sencillas.

Ítem 1.2)

16 estudiantes de los 22 contestaron correctamente este ítem, 4 estudiantes dejaron la respuesta incompleta.

El 72,73% de los jóvenes comprenden lo que significa el numerador de una fracción cuando se tiene la interpretación parte-todo. Solo un estudiante contestó de forma incorrecta confundiendo el numerador con el denominador.



el numerador significa que cuantos espacios se cogen como lo dice en la fraccion $\frac{5}{8}$ se cogen 5 de 8 espacios

Gráfico 29. Respuesta a la situación 2, ítem 1.2

En la figura se observa lo que argumentó un estudiante para resolver esta pregunta, donde interpreta el denominador como el total de espacios y el numerador los que se cogen.

Ítem 1.3)

El 36.36% de los estudiantes contestaron de forma correcta este ítem, el 22,73% tuvieron una respuesta aproximada y el 40,91% respondieron de forma incorrecta.

8 estudiantes graficaron y relacionaron la fracción $\frac{10}{16}$ con la fracción $\frac{5}{8}$ como se ilustra en la figura:

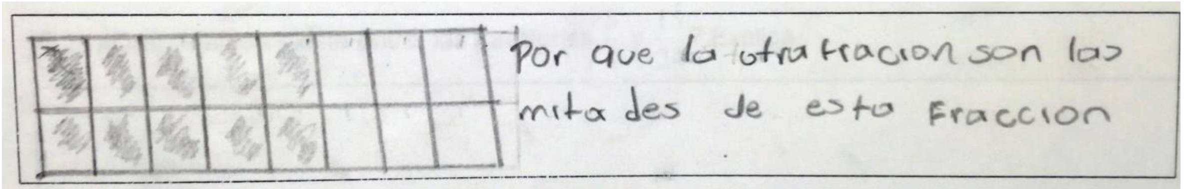


Gráfico 30. Respuesta a la situación 2, ítem 1.3

De los 22 estudiantes, 9 solo graficaron sin hallar la relación con la fracción $\frac{5}{8}$ y solo 5 jóvenes presentaron dudas con la gráfica al no tomar todas las divisiones de la figura de la misma forma y tamaño.

Ítem 1.4)

El 27,27% de los estudiantes contestaron correctamente este ítem, el 72,73% de los jóvenes fallaron en esta pregunta; 16 estudiantes de los 22 contestaron mal, se les dificultó hallar una fracción equivalente a $\frac{5}{8}$ y $\frac{10}{16}$ debido a la falta de comprensión en la pregunta, la mayoría de ellos dibujaron o escribieron una fracción que no está relacionada con las anteriores como se muestra en la figura:

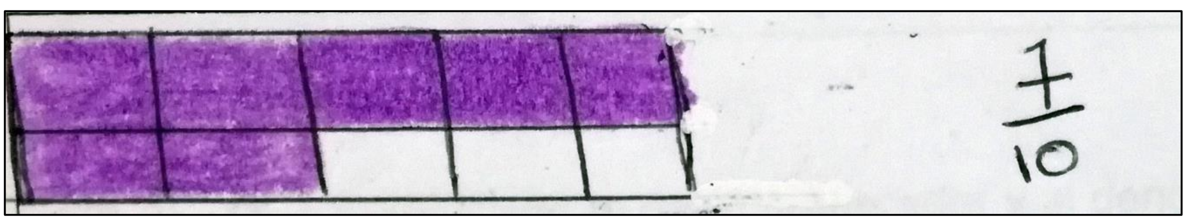


Gráfico 31. Respuesta a la situación 2, ítem 1.4

Devolución:

Ante las dudas de los estudiantes, se les indica que analicen muy bien cómo están relacionadas las dos fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{10}{16}$ y a partir de esta relación establezca otra fracción. Luego de la sugerencia 6 jóvenes lograron captar la relación y encontrar otra fracción equivalente como se muestra en la figura:

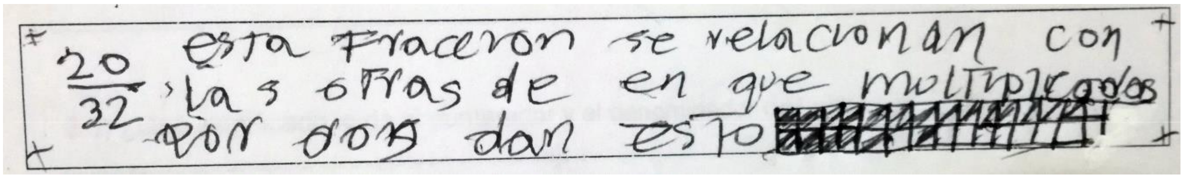


Gráfico 32. Respuesta a la situación 2, ítem 1.4

En esta grafica el estudiante multiplico el numerador y el denominador de la fracción $\frac{10}{16}$ por dos, de esta forma halló la fracción $\frac{20}{32}$ equivalente a las dos anteriores y comprende la relación que hay entre ellas.

2.1) Un computador se compró hace cuatro meses por $ 2.040.000 y se vende por los $\frac{5}{8}$ del costo. ¿En cuánto se vende el computador?

El 45,45% de los estudiantes contestaron satisfactoriamente esta pregunta, el 31,82% se equivocaron, el 4,55% tenían una idea pero no concretaron y el 18,18% dejaron el espacio en blanco por no comprender que operación debían de hacer.

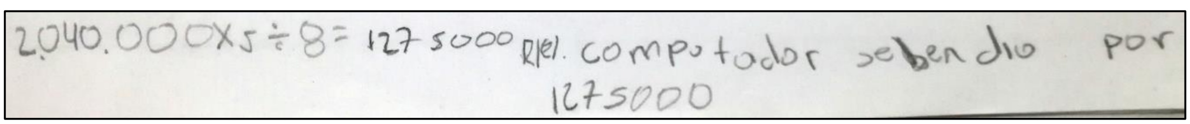


Gráfico 33. Respuesta a la situación 2, ítem 2.1

En la figura se observa como 10 de los jóvenes comprendieron la interpretación de la fracción como operador, ellos lograron operar la fracción sobre la unidad que se les dio, multiplicaron el valor del computador por 5 y dividieron entre 8.

<u>Devolución</u>

Algunos estudiantes tenían dudas con respecto a la pregunta, no sabían cómo relacionar el costo del computador con la fracción, ante este interrogante se les sugirió leer bien el enunciado y analizar el significado del numerador y el denominador si la unidad fuera el costo del computador.

Actividad en grupo

3.1) El salón de grado octavo y noveno tiene 24 estudiantes y $\frac{5}{8}$ del total son hombres. ¿Cuántas mujeres son?

incorrecta y el 14,29% tienen idea pero les faltó concretar mejor la respuesta.

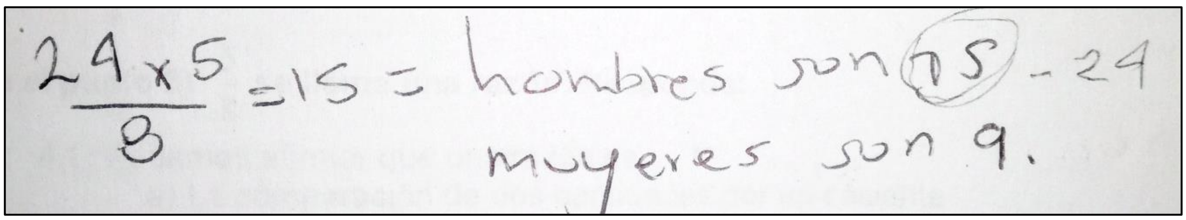


Gráfico 34. Respuesta a la situación 2, ítem 3.1

En la imagen se aprecia como tres grupos utilizaron el concepto de fracción como operador y multiplicaron el número de estudiantes por $\frac{5}{8}$, luego al total le restaron el número de hombres para obtener la cantidad de niñas en el grupo.

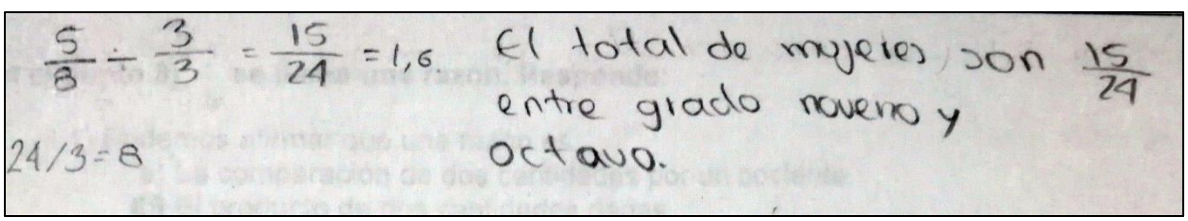


Gráfico 35. Respuesta a la situación 2, ítem 3.1

Los tres grupos que se equivocaron lo hicieron al multiplicar o dividir mal por los términos de la fracción, o como en el caso de la imagen, los estudiantes amplificaron la fracción $\frac{5}{8}$ por tres, para ellos el total de mujeres fue la fracción equivalente.

3.3) ¿Qué significa el numerador y el denominador de la fracción $\frac{15}{24}$?

Este ejercicio es una primera aproximación al concepto de razón, donde se están relacionando por medio de una fracción el número de hombres con el total de estudiantes. El 57,15% de los grupos tuvieron una aproximación a la respuesta y relacionaron los dos términos de la fracción.

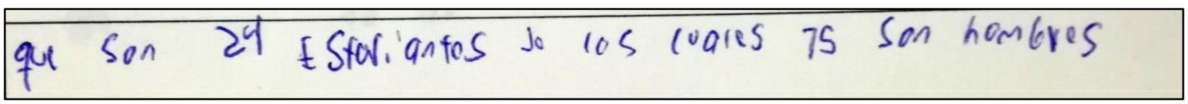


Gráfico 36. Respuesta a la situación 2, ítem 3.3

En la figura se observa como los grupos de trabajo le dieron sentido al denominador y numerador dela fracción, para ellos el 24 son los estudiantes y el 15 corresponde a los hombres.

3.5) ¿Cómo relacionaría el número de mujeres y el total de estudiantes por medio de una fracción?

El 42,86% de los grupos contestaron satisfactoriamente la pregunta, el 42,86% no llegaron a la respuesta correcta y el 14,29 tuvieron una idea pero no la concretaron. Tres de los grupos comprendieron la interpretación de la fracción como una razón, relacionaron adecuadamente el número de mujeres con el total de estudiantes. Los otros tres grupos tuvieron dificultad para dar una respuesta adecuada, uno de los motivos es la falta de comprensión en la pregunta y no releer los ítems anteriores.

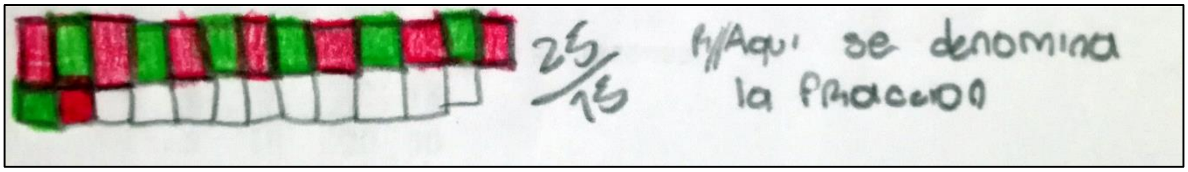


Gráfico 37. Respuesta a la situación 2, ítem 3.5.

En la figura se puede apreciar la falta de comprensión de la pregunta en algunos grupos, no tuvieron en cuenta el número de mujeres y relacionaron por medio de la fracción el total de hombres con el total de estudiantes, todavía están interpretando la fracción como parte-todo.

Devolución

Ante la duda de algunos grupos de trabajo con respecto a este interrogante, se le sugirió leer detenidamente los ítems anteriores y analizar las fracciones dadas en ellos.

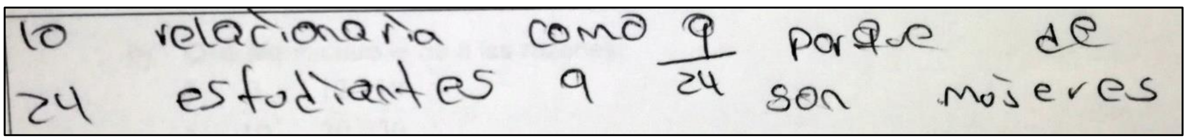


Gráfico 38. Respuesta a la situación 2, ítem 3.5.

En la figura se puede apreciar como los grupos de trabajo llegan al concepto de razón, deducen la fracción $\frac{9}{24}$ donde están relacionando el número de mujeres en el numerador con el total de estudiantes en el denominador.

Actividad Individual

4.2) Una prueba de matemática tiene 10 preguntas, un alumno responde correctamente 6 de estas.

La razón $\frac{6}{10}$ simplificada queda $\frac{3}{5}$ y significa que por cada 5 preguntas contesto bien 3.

a) Escribe la razón entre el número de preguntas incorrectas y el número total de preguntas
b) Escribe la razón entre el número de preguntas incorrectas y el número de preguntas correctas

Ítem 4.2.a)

El 50% de los estudiantes contestaron satisfactoriamente la pregunta, el 9,09% se acercaron a la respuesta, el 27,27% respondieron de forma incorrecta; 11 estudiantes comprenden el concepto de razón y relacionan por medio de una fracción el número de preguntas incorrectas y el total de preguntas; 6 jóvenes fallaron en la respuesta al no relacionar adecuadamente los términos por medio de una fracción o al no utilizar un cociente para ello.

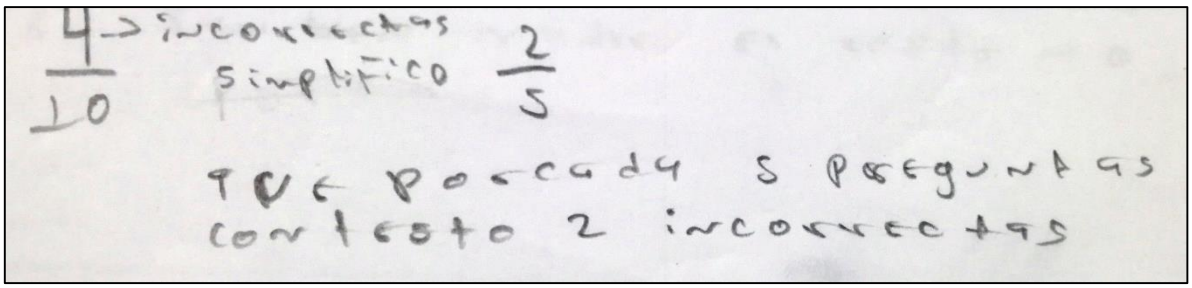


Gráfico 39. Respuesta a la situación 2, ítem 4.2.a

En la figura se observa como el estudiante relaciona el número de preguntas incorrectas 4 y el total de preguntas 10 por medio de una razón, luego la simplifica e interpreta sus términos, esto indica que el educando comprendió el concepto de razón.

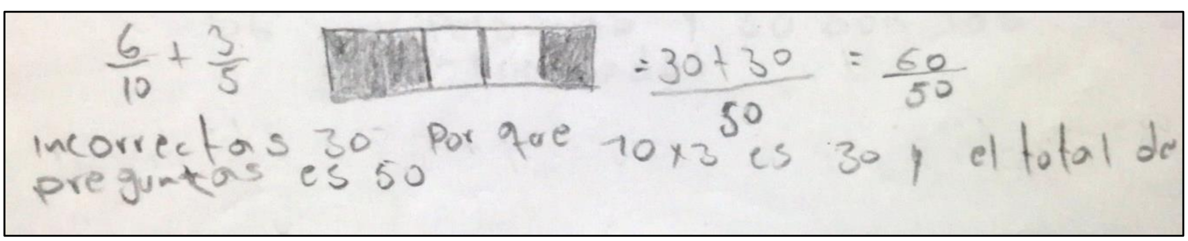


Gráfico 40. Respuesta a la situación 2, ítem 4.2.a

En esta imagen el estudiante relaciona por medio de una razón el número de preguntas buenas con el total de preguntas, simplifica esta razón y luego la suma a la anterior. Para el educando el denominador corresponde al total de preguntas y uno de los valores que suma son las preguntas malas, de alguna forma el concepto de razón está presente en la respuesta.

Ítem 4.2.b)

El 36,36% de los estudiantes contestaron bien esta pregunta, el 45,45% lo hizo mal y el 18,18% no respondieron; 8 estudiantes escribieron de forma adecuada la razón pedida, 10 jóvenes a pesar de utilizar una razón, no relacionaron los términos de la pregunta, 4 estudiantes no comprendieron la pregunta y la omitieron.

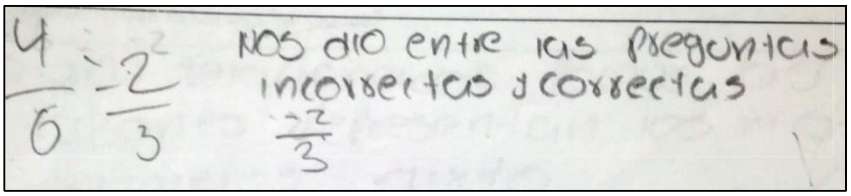


Gráfico 41. Respuesta a la situación 2, ítem 4.2.b

En la imagen se puede apreciar como el estudiante relaciona por medio de una razón el número de preguntas incorrectas y correctas, escribe la razón $\frac{4}{6}$, la simplifica e interpreta el resultado.

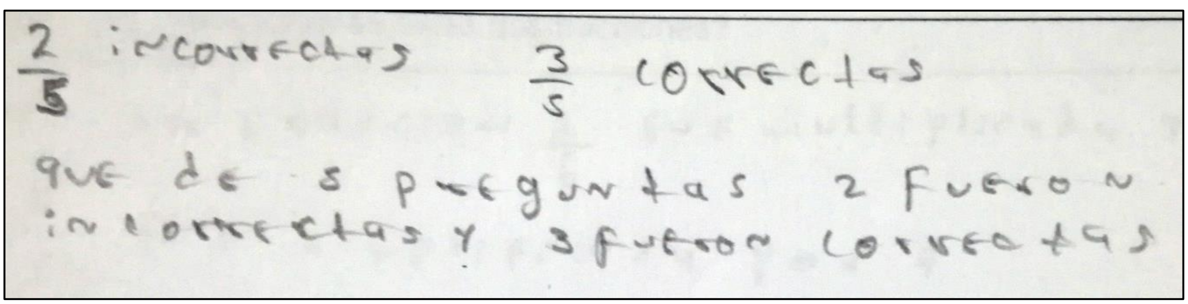


Gráfico 42. Respuesta a la situación 2, ítem 4.2.b

En esta otra imagen el estudiante escribe dos razones, en la primer relaciona el número de preguntas incorrectas con el total de preguntas $\frac{2}{5}$, en la segunda razón relaciona el número de preguntas correctas con el total de preguntas $\frac{3}{5}$, simplifica ambas razones. Luego relaciona las dos razones al decir que por 5 preguntas (total) 2 fueron incorrectas y 3 fueron correctas, lo cual es cierto.

Por medio de estos resultados se comprueba que los estudiantes asimilaron el concepto de razón.

Analisis de los resultados en grupo del ítem 4

Después que los estudiantes desarrollaron la situación 4 en forma individual, se forman los grupos de trabajo establecidos con anterioridad por el docente. Conformados los grupos, empezaron a comparar las respuestas que habían obtenido en su trabajo individual. Los resultados cualitativos y cuantitativos de las respuestas se aprecian en las siguientes tablas:

Tabla 28.

Resultados cualitativos de la situación 2, ítem 4

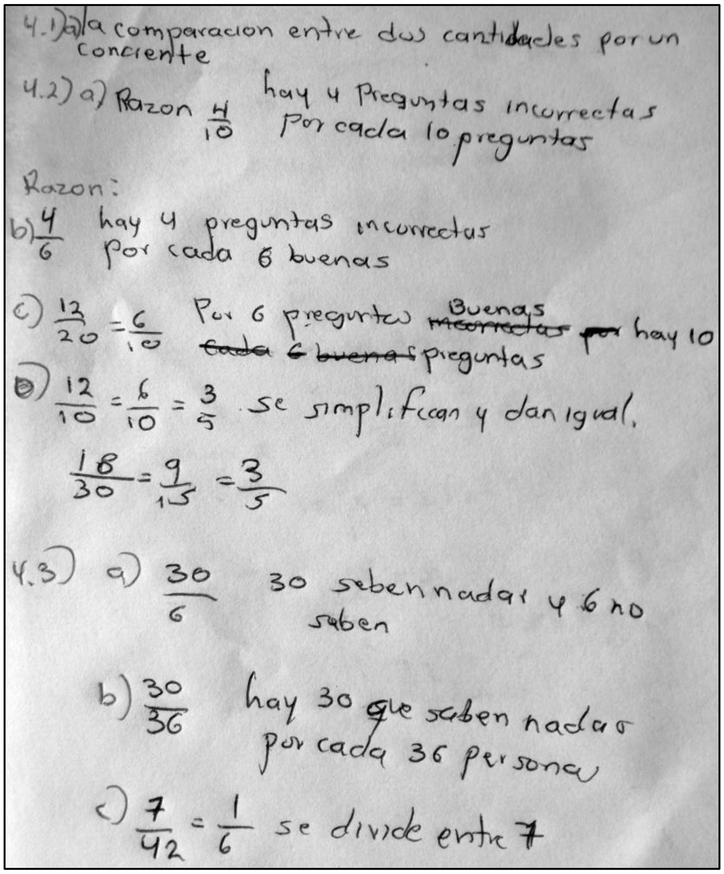
GRADO 8-9	4.1	4.2a	4.2b	4.2c	4.2d	4.3a	4.3b	4.3c
GRUPO 1	I	I	I	B	P	C	C	P
GRUPO 2	I	C	C	P	C	I	C	I
GRUPO 3	C	C	I	I	C	I	B	B
GRUPO 4	C	C	C	C	C	P	C	C
GRUPO 5	I	C	C	B	B	B	B	B
GRUPO 6	C	C	I	P	P	I	C	C
GRUPO 7	C	P	I	C	I	P	P	C

Tabla 29.

Resultados cuantitativos de la situación 2, ítem 4

ITEM	**CORRECTO**		**INCORRECTO**		**EN PROCESO**		**EN BLANCO**	
	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje
4.1	4	57,14	3	42,86	0	0,00	0	0,00
4.2a	5	71,43	1	14,29	1	14,29	0	0,00
4.2b	3	42,86	4	57,14	0	0,00	0	0,00
4.2c	2	28,57	1	14,29	2	28,57	2	28,57
4.2d	3	42,86	1	14,29	2	28,57	1	14,29
4.3a	1	14,29	3	42,86	2	28,57	1	14,29
4.3b	4	57,14	0	0,00	1	14,29	2	28,57
4.3c	3	42,86	1	14,29	1	14,29	2	28,57

Todos los integrantes en cada grupo, compararon y examinaron los resultados obtenidos en el trabajo individual. Las respuestas a todos los puntos del ítem 4 fueron escritas después de debatir y corregir los errores.


4.1) la comparacion entre dos cantidades por un conciente

4.2) a) Razon $\frac{4}{10}$ hay 4 Preguntas incorrectas por cada 10 preguntas

Razon:

b) $\frac{4}{6}$ hay 4 preguntas incorrectas por cada 6 buenas

c) $\frac{12}{20} = \frac{6}{10}$ Por 6 preguntas Buenas ~~incorrectas~~ ~~por~~ hay 10 ~~cada~~ 6 ~~buenas~~ preguntas

d) $\frac{12}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ se simplifican y dan igual.

$\frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

4.3) a) $\frac{30}{6}$ 30 saben nadar y 6 no saben

b) $\frac{30}{36}$ hay 30 que saben nadar por cada 36 persona

c) $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$ se divide entre 7

Gráfico 43. Respuesta a la situación 2, ítem 4.

En la imagen se observan los resultados que uno de los grupos dio a los puntos del ítem 4. En el ítem que menos dudas tuvieron los estudiantes fue en el 4.2a, el 71,43% de los grupos lo contestaron de forma adecuada, en él los estudiantes escribieron correctamente las razones e interpretaron sus términos.

El ítem que más se les dificultó a los estudiantes fue el 4.3a, solo un grupo lo contestó bien, 2 grupos escribieron la razón pero no explicaron los términos, 3 se equivocaron y 1 dejo en blanco. Posteriormente, se les preguntó a los estudiantes por este ítem, ellos contestaron que después del análisis en grupo se dieron cuenta que era sencillo y el error estuvo en la falta de comprensión de la pregunta.

5.1) Según los ejercicios anteriores, define que es una razón.

6 estudiantes responden adecuadamente al definir el concepto de razón, 8 tienen dificultades, 3 se aproximan al concepto y 5 no responden.

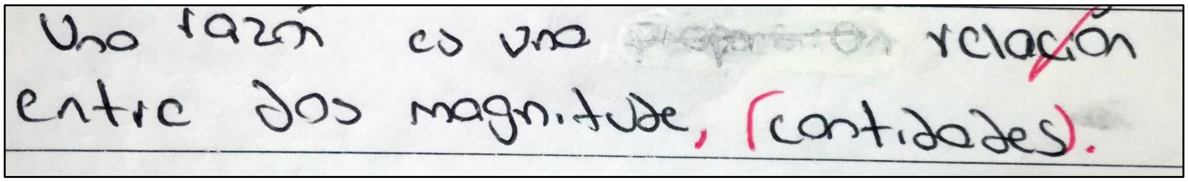


Gráfico 44. Respuesta a la situación 2, ítem 5.1.

En la imagen se observa como los estudiantes definen el concepto de razón, después de la secuencia los jóvenes comprenden el concepto de razón y lo utilizan en la solución de problemas del entorno.

ANEXO 14

La siguiente información indica el número de alumnos o grupos que llegaron a:

C. Respuestas correctas.

I. Respuestas incorrectas.

P. Respuestas en proceso.

B. Respuestas en blanco.

Tabla 30.

Calificación cuantitativa secuencia Didáctica sobre Proporciones Individual y Grupal

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1.1	11	50,00	6	27,27	5	22,73	0	0,00
1.2	7	31,82	7	31,82	8	36,36	0	0,00
1.3	14	63,64	8	36,36	0	0,00	0	0,00
2.1	15	68,18	5	22,73	2	9,09	0	0,00
2.2	18	81,82	2	9,09	1	4,55	1	4,55
2.3	16	72,73	2	9,09	3	13,64	1	4,55
3.1	15	68,18	5	22,73	0	0,00	2	9,09
3.2	15	68,18	4	18,18	1	4,55	2	9,09
3.3	6	27,27	8	36,36	6	27,27	2	9,09
4.1	17	77,27	4	18,18	1	4,55	0	0,00
4.2	11	50,00	5	22,73	5	22,73	1	4,55
4.3	13	59,09	3	13,64	4	18,18	2	9,09
4.4	6	27,27	2	9,09	12	54,55	2	9,09
4.5	6	27,27	12	54,55	3	13,64	1	4,55
4.6	5	22,73	11	50,00	3	13,64	3	13,64
4.7	6	27,27	7	31,82	7	31,82	2	9,09
5.1	9	40,91	9	40,91	2	9,09	2	9,09
5.2	13	59,09	4	18,18	2	9,09	3	13,64
5.3	14	63,64	3	13,64	4	18,18	1	4,55
6 Grupo	7	100,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
6.1 Grupo	3	42,86	3	42,86	1	14,29	0	0,00
6.2 Grupo	5	71,43	0	0,00	2	28,57	0	0,00
6.3 Grupo	4	57,14	2	28,57	1	14,29	0	0,00
7.1	18	81,82	1	4,55	3	13,64	0	0,00
7.2	10	45,45	7	31,82	3	13,64	2	9,09
7.3	1	4,55	15	68,18	1	4,55	5	22,73
7.4	4	18,18	0	0,00	15	68,18	3	13,64

7.5	8	36,36	9	40,91	1	4,55	4	18,18
7.6	6	27,27	7	31,82	3	13,64	6	27,27
7.7	1	4,55	4	18,18	8	36,36	9	40,91
8.1	6	27,27	5	22,73	2	9,09	9	40,91
8.2	5	22,73	3	13,64	4	18,18	10	45,45
8.3	1	4,55	10	45,45	4	18,18	7	31,82
9 Grupo	1	14,29	3	42,86	1	14,29	2	28,57
9.1 Grupo	1	14,29	5	71,43	1	14,29	0	0,00
9.2 Grupo	1	14,29	4	57,14	1	14,29	1	14,29
9.3 Grupo	5	71,43	1	14,29	0	0,00	1	14,29

La secuencia didáctica sobre Proporciones se inicia con 22 alumnos, se dan las indicaciones iniciales de la forma de trabajo individual y grupal; para el trabajo grupal se forman seis grupos de tres estudiantes y un grupo de cuatro. El desarrollo de la secuencia cuenta con nueve ítems, siete para trabajar individual y dos en grupo. Se divide el trabajo en cinco partes, cada parte de una hora, en las primeras tres horas trabajan individual para realizar la primera fase de la ingeniería, en las siguientes dos horas trabajan en grupo para efectuar las fases de validación, formulación e institucionalización entre estudiantes y el docente. En las situaciones planteadas se pone énfasis en las variables microdidácticas VMP-1, VMP-2, VMP-3d, VMP-3i, VMP-4d y VMP-4i.

Actividad Individual

1) Observa la siguiente tabla:

No. Personas	No. Bananos
8	12
10	X

1.1) Por medio de una proporción relaciona los datos de la tabla.

1.2) ¿Qué significa la última fila de la tabla?

1.3) ¿Calcula el valor de x en la proporción anterior?

¿Qué significa este resultado?

Ítem 1.1)

El 50% de los estudiantes contestaron satisfactoriamente, el 22,73% les faltó concretar la respuesta y el 27,27% falló; 11 estudiantes acertaron en la respuesta y comprendieron el concepto de proporción al igualar las dos razones de la tabla, a 5 estudiantes les faltó igualar las razones, pero tenían la idea de lo que es una proporción y 6 jóvenes fallaron al no establecer adecuadamente las proporciones.

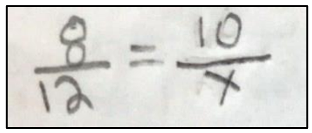


Gráfico 45. Respuesta a la situación 3, ítem 1.1.

En la figura se puede observar la proporción hallada por un estudiante utilizando los datos de la tabla, los estudiantes que contestaron bien, argumentaron que el concepto de proporción es muy sencillo.

Ítem 1.2)

El 31,82% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 36,36% lo hicieron de forma regular y el 31,82% estuvieron alejados de la respuesta correcta. La mayoría de los estudiantes comprendieron que significa la x e interpretaron correctamente su significado.

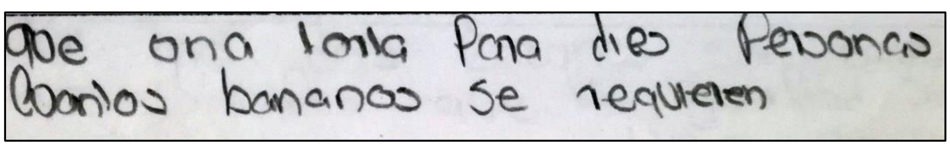


Gráfico 46. Respuesta a la situación 3, ítem 1.2.

En la gráfica se puede observar la respuesta correcta que dieron 7 estudiantes, 8 se aproximaron pero les falto concretar. En la imagen el estudiante plantea que la x son los bananos que se necesitan para hacer una torta para 10 personas.

Ítem 1.3)

El 63,64% de los estudiantes contestaron bien y el 36,36% lo hicieron mal. Los estudiantes que contestaron bien, utilizaron adecuadamente la propiedad fundamental de las proporciones para hallar el término desconocido; los 8 estudiantes que no solucionaron este ítem, fue porque multiplicaron y dividieron por los números equivocados como se ilustra en la imagen.

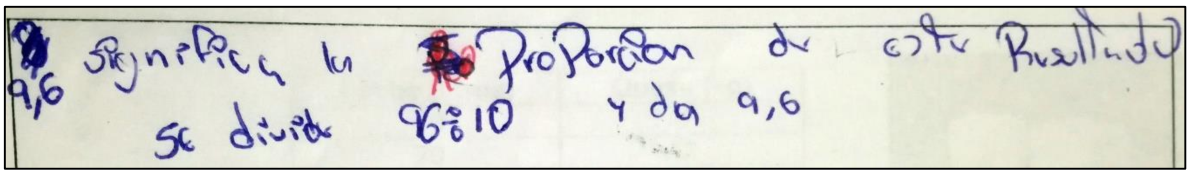


Gráfico 47. Respuesta a la situación 3, ítem 1.3.

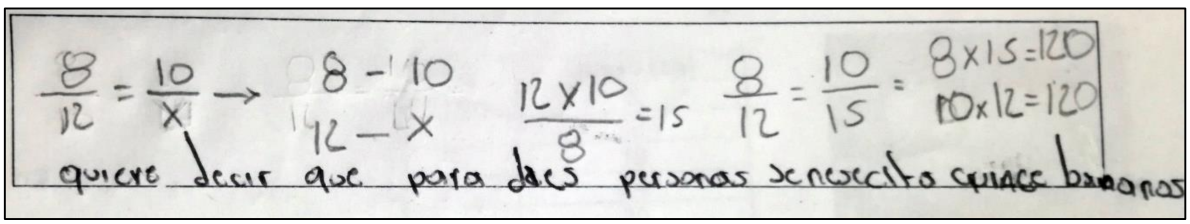


Gráfico 48. Respuesta a la situación 3, ítem 1.4.

La grafica muestra como 14 estudiantes resolvieron bien este ítem, ellos establecieron una proporción con los datos de la tabla, encontraron el término desconocido y verificaron la solución por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.

3) Encuentra el valor de la letra desconocida, de modo que se obtengan razones equivalentes. Indica el proceso.

3.1) $\frac{3}{18} = \frac{x}{90}$

3.3) ¿Qué significado le da a una proporción?

Ítem 3.1)

El 68,18% de los estudiantes contestaron correctamente este ítem, el 22,73% fallo en la respuesta. Los estudiantes utilizaron la propiedad fundamental de las proporciones para hallar el término desconocido, solo 5 educandos se equivocaron al multiplicar y dividir por los términos dados.

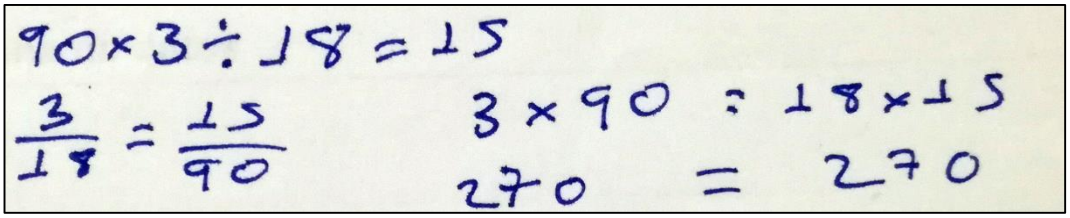


Gráfico 49. Respuesta a la situación 3, ítem 3.1

En la figura se puede apreciar el proceso que realizaron 15 estudiantes para hallar el termino desconocido, multiplicaron 3 x 90 y el resultado lo dividieron entre 18, con el resultados establecieron las dos razones y verificaron que fuera una proporción multiplicando en cruz. Por medio de estos ejercicios se concluye que los jóvenes reconocen que es una proporción y pueden hallar los datos faltantes.

Ítem 3.3)

El 27,27% de los estudiantes definieron correctamente que es una proporción, 27,27% comprenden el concepto pero les falta concretar la respuesta, el 36,36% no definieron bien el concepto, sin embargo, los jóvenes argumentaron que saben que es una proporción pero les costó escribirlo.

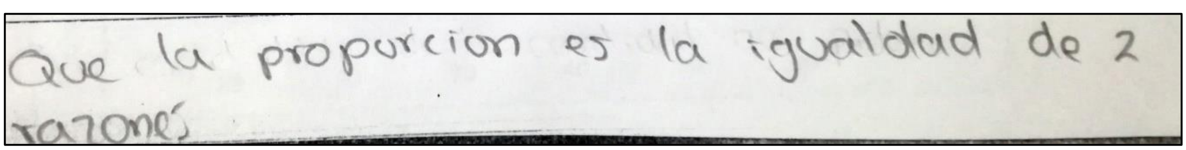


Gráfico 50. Respuesta a la situación 3, ítem 3.3

En la figura se observa la respuesta que dieron 6 estudiantes sobre el concepto de proporción, otros 6 jóvenes utilizaron ejemplos para ello y 8 no lo definieron correctamente. De acuerdo con los ejercicios prácticos y las preguntas teóricas se puede concluir que la mayoría de los estudiantes comprendieron el concepto de proporción.

4) Observa la siguiente tabla:

Leche (litros)	Queso (kg)
10	6
20	12
30	18
40	24
50	30

4.1) ¿Qué sucede el queso a medida que aumenta la leche?

4.2) Escribe una razón con los datos de la tabla y explícala

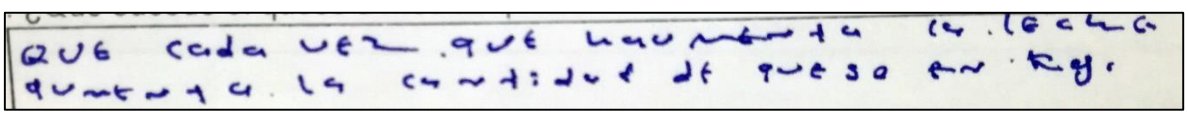
4.3) Establece una proporción con los datos de la tabla y explícala

4.5) ¿Con 25 litros de leche, cuántos kilos de queso se pueden preparar? Indica el procedimiento para calcularlo.

4.7) ¿Cómo se determina la constante de proporcionalidad? ¿Para qué se puede utilizar?

Ítem 4.1)

El 77,27% de los estudiantes comprenden la relación que hay entre los litros de leche y los kilos de queso, el 18,18% no supieron escribir dicha relación.



QUE cada vez. que haumenta la. leche
aumenta. la cantidad de queso en. kg.

Gráfico 51. Respuesta a la situación 3, ítem 4.1

En la figura se puede apreciar la respuesta que dieron 17 estudiantes, donde comprenden la relación que hay entre las dos magnitudes de la tabla, ellos argumentan que a medida que aumenta la leche aumentan los kilos de queso, este es un primer ejercicio sobre magnitudes directamente proporcionales.

Ítem 4.2)

El 50% de los estudiantes contestaron satisfactoriamente, el 22,73% escribieron una proporción, otro 22,73% intentaron escribir una proporción, pero no relacionaron correctamente los datos de la tabla.

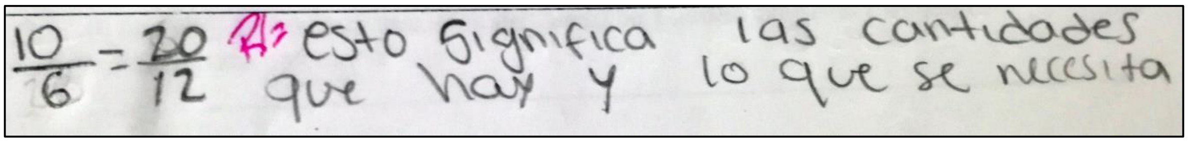


Gráfico 52. Respuesta a la situación 3, ítem 4.2

En la figura se puede apreciar la respuesta que dieron 5 estudiantes, ellos escribieron dos razones de la tabla y las igualaron formando la proporción.

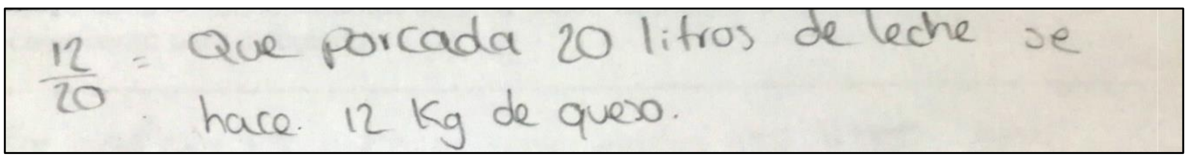


Gráfico 53. Respuesta a la situación 3, ítem 4.2

En esta figura, 11 estudiantes escribieron una razón y la interpretaron, se puede apreciar que primero se nombran los litros de leche y luego los kg de queso, cuando los jóvenes trabajaron en grupo, ellos mismos se corrigieron.

Ítem 4.3)

El 59,09% de los estudiantes contestaron correctamente, el 18,18% estuvieron cerca de la respuesta, el 13, 64% falló; 13 estudiantes escribieron correctamente la proporción con los datos de la tabla, 3 de ellos intentaron escribir la proporción pero se equivocaron al no relacionar de forma adecuada las razones que hallaron.

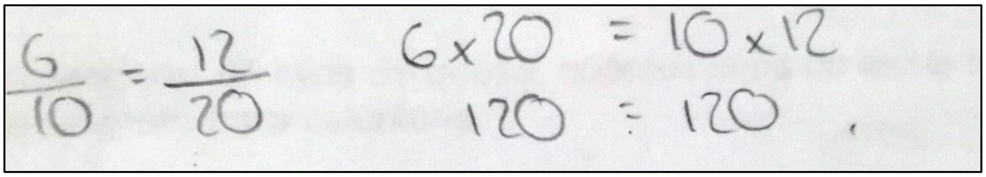


Gráfico 54. Respuesta a la situación 3, ítem 4.3

En la figura se observa la respuesta que dieron 13 estudiantes, donde escribieron correctamente la proporción y verificaron por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.

Ítem 4.5)

El 27,27% de los estudiantes respondieron bien este ítem, el 13,64% les falto precisar la respuesta y el 54,55% fallaron al no establecer adecuadamente la proporción.

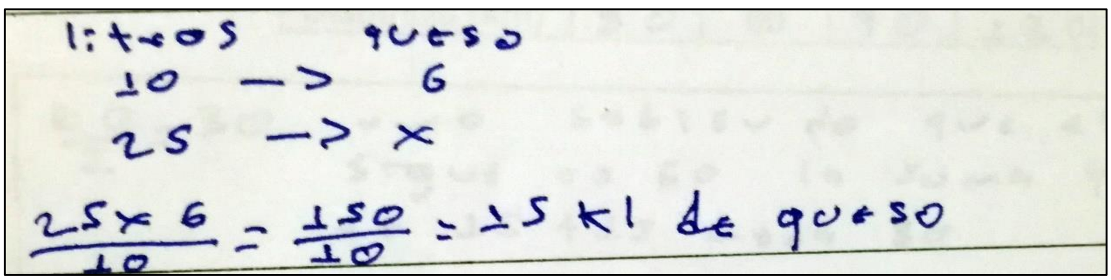


Gráfico 55. Respuesta a la situación 3, ítem 4.5

En la figura se aprecia el proceso que hicieron 6 estudiantes para llegar a la respuesta correcta, 3 jóvenes escribieron una proporción adecuada pero les faltó responder la pregunta, 12 escribieron mal la proporción y fallaron en la respuesta.

Ítem 4.7)

El 27,27% de los estudiantes respondieron bien el ítem, el 31,82% tienen idea pero no concretaron la respuesta y el 31,82% fallaron.

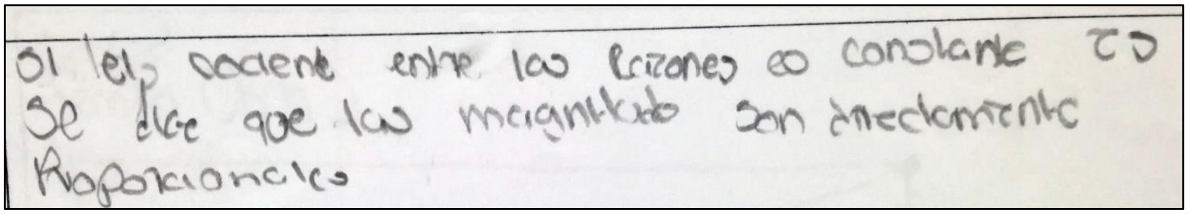


Gráfico 56. Respuesta a la situación 3, ítem 4.5

La figura muestra la respuesta de uno de los estudiantes, en ella el estudiante se a magnitudes directamente proporcionales cuando el cociente de las razones es constante, en general 13 estudiantes llegan al mismo concepto.

Analisis de los resultados en grupo del ítem 4

Después que los estudiantes desarrollaron la situación 4 en forma individual, se forman los grupos de trabajo establecidos con anterioridad por el docente. Conformados los grupos, empezaron a comparar las respuestas que habían obtenido en su trabajo individual. Los resultados cualitativos y cuantitativos de las respuestas se aprecian en las siguientes tablas:

Tabla 31.

Resultados cualitativos de la situación 3, ítem 4

GRADO 8-9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7
GRUPO 1	C	I	C	B	P	P	I
GRUPO 2	C	C	C	C	C	C	C
GRUPO 3	C	C	P	P	I	B	P
GRUPO 4	C	C	C	C	I	I	P
GRUPO 5	I	I	C	C	P	P	P
GRUPO 6	C	C	C	C	C	C	C
GRUPO 7	C	P	P	P	C	C	P

Tabla 32.

Resultados cualitativos de la situación 3, ítem 4

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje
4.1	6	85,71	1	14,29	0	0,00	0	0,00
4.2	4	57,14	2	28,57	1	14,29	0	0,00
4.3	5	71,43	0	0,00	2	28,57	0	0,00
4.4	4	57,14	0	0,00	2	28,57	1	14,29
4.5	3	42,86	2	28,57	2	28,57	0	0,00
4.6	3	42,86	1	14,29	2	28,57	1	14,29
4.7	2	28,57	1	14,29	4	57,14	0	0,00

Todos los integrantes en cada grupo, compararon y examinaron los resultados obtenidos en el trabajo individual. Las respuestas a todos los puntos del ítem 4 fueron escritas después de debatir y corregir los errores.

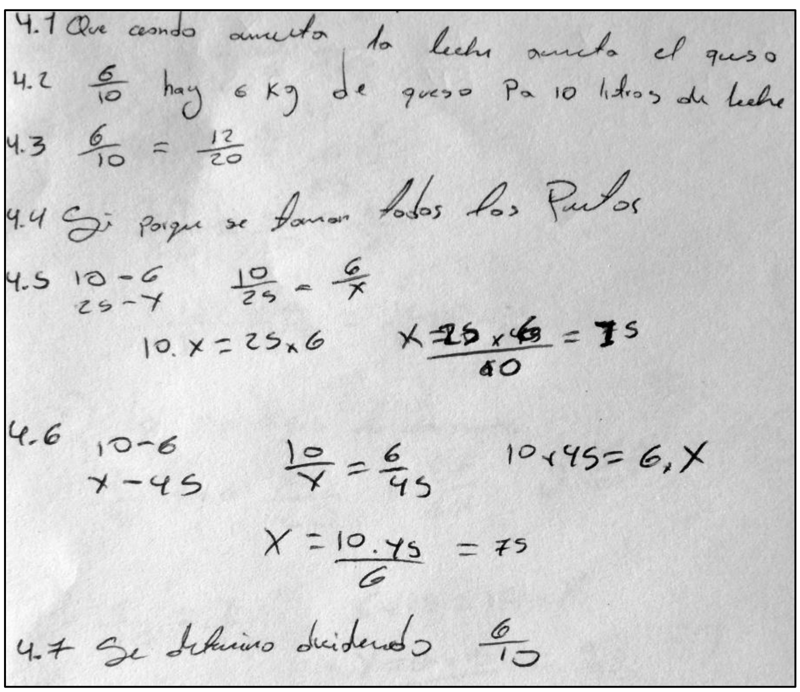

4.1 Que cuando aumenta la leche aumenta el queso
4.2 $\frac{6}{10}$ hay 6 kg de queso Pa 10 litros de leche
4.3 $\frac{6}{10} = \frac{12}{20}$
4.4 Si porque se toman todos los Puntos
4.5 10 − 6
25 − X
$\frac{10}{25} = \frac{6}{X}$
$10 . X = 25 \times 6$
$X = \frac{25 \times 6}{10} = 15$
4.6 10 − 6
X − 45
$\frac{10}{X} = \frac{6}{45}$
$10 \times 45 = 6 . X$
$X = \frac{10 . 45}{6} = 75$
4.7 Se determino dividendo $\frac{6}{10}$

Gráfico 57. Respuesta a la situación 3, ítem 4

En la figura se observan las respuestas que un grupo dio a los todos los puntos del ítem 4. El ítem que mejor resultados presentó fue el 4.1, donde el 85,71% de los grupos contestó satisfactoriamente, para los estudiantes fue muy sencillo escribir la relación entre las dos magnitudes.

El ítem con mayor dificultad fue el 4.7, 2 grupos contestaron bien, 4 grupos les faltó precisar la respuesta y un grupo contesto mal, en este ítem los estudiantes tenían que explicar con sus propias palabras como se halla la constante de proporcionalidad y para que se utiliza, la mayoría de los estudiantes saben hallar la constate, pero se les dificulta plasmar con palabras este concepto.

<u>Actividad en grupo</u>

6) Completa la tabla de magnitudes directamente proporcionales, indica el proceso

Tiempo (hrs)	2	4	6	8
Distancia (km)		60		

6.1) ¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

6.2) Realiza la gráfica a la tabla anterior.

6.3) ¿Qué significa la razón 4/60?

Ítem 6)

El 100% de los grupos lleno correctamente la tabla. Como se observa en la figura, los siete grupos coincidieron en la respuesta, ellos escribieron que ambas magnitudes (tiempo y distancia) crecen de forma constante, el tiempo de 2 en 2 y la distancia de 30 en 30.

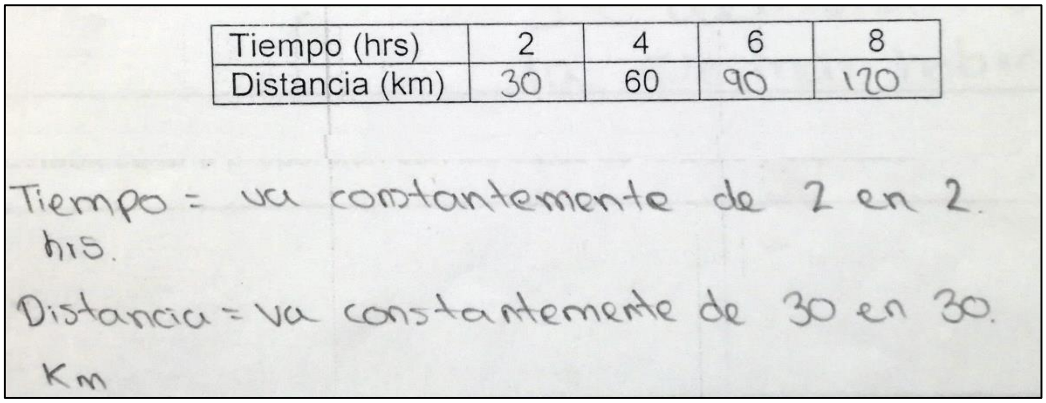


Gráfico 58. Respuesta a la situación 3, ítem 6.

Ítem 6.1)

El 42,86% de los grupos contestaron satisfactoriamente, el otro 42,86% no acertó en la respuesta; 3 grupos hallaron correctamente la constante de proporcionalidad al dividir los valores de la magnitud distancia sobre los valores de la magnitud tiempo respectivamente, 2 grupos dividieron al contrario (tiempo sobre distancia) y dejaron como resultado cero, otros 2 grupos solo escribieron como se hallaba la constante, pero no hicieron el cálculo.

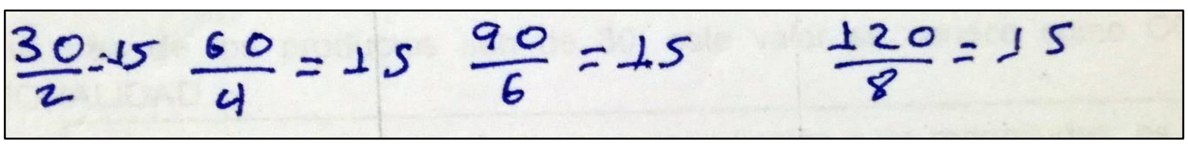


Gráfico 59. Respuesta a la situación 3, ítem 6.1

En la gráfica se observa el proceso que realizaron 3 grupos de trabajo, dividieron correctamente los valores de la distancia sobre los valores del tiempo, también concluyeron que si los resultados son iguales es porque si es una constante de proporcionalidad.

Ítem 6.2)

El 71,43% de los grupos realizaron correctamente la gráfica, el 28,57% les faltó precisión al representar los datos en el plano cartesiano.

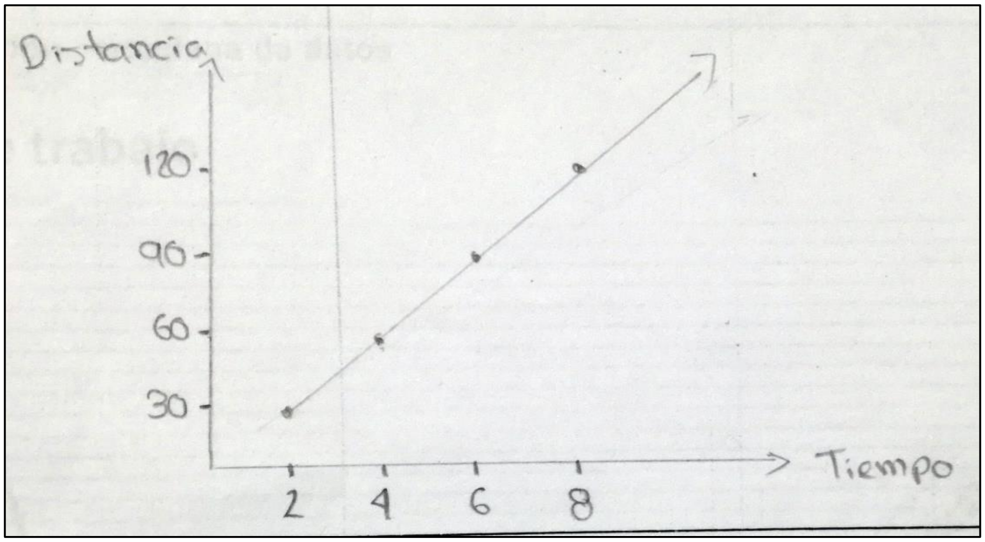


Gráfico 60. Respuesta a la situación 3, ítem 6.2

En la imagen se observa la forma como 5 grupos realizaron la graficas de los datos de la tabla, ubicaron correctamente los puntos, nombraron los ejes y trazaron la línea recta. En el momento graficar los estudiantes decían que la gráfica debía dar una línea recta y se esmeraron en hacer bien la representación.

Ítem 6.3)

El 57,14 % de los grupos respondieron de forma correcta, el 28,57% estuvieron cerca de la respuesta, pero les faltó precisión. Los 7 grupos reconocieron los elementos de la razón e interpretaron sus elementos, 5 de ellos no tuvieron problema en escribirlos, pero a 2 grupos les falto detallar uno de los términos.

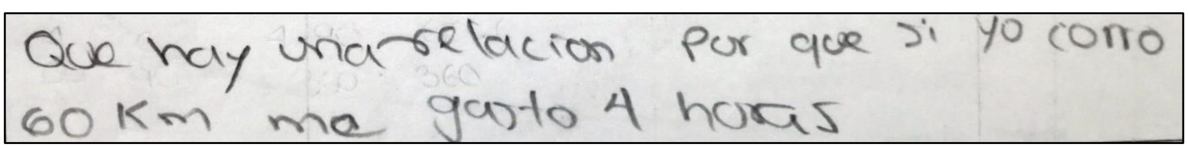


Gráfico 61. Respuesta a la situación 3, ítem 6.3

En la figura se puede observar la interpretación que dio uno de los grupos, los estudiantes reconocieron lo que significaba el numerador y el denominador de la razón, se puede apreciar que los estudiantes comprenden el significado de razón y lo saben interpretar.

Actividad Individual

7) Observa la siguiente tabla:

No. Obreros	Días de trabajo
1	30
2	15
5	6
15	2

7.1) ¿Qué sucede con los días de trabajo a medida que aumentan los obreros?

7.2) Escribe una razón con los datos de la tabla y explícala

7.3) Establece una proporción con los datos de la tabla y explícala

7.5) ¿Si fueran 10 obreros, cuántos días trabajarían? Se puede realizar el cálculo?. Indica el procedimiento.

7.7) ¿Cómo se determina la constante de proporcionalidad? ¿Para qué se puede utilizar?

el 4,55% fallo en la respuesta; 18 estudiantes comprendieron la relación entre las variables, un estudiante no tuvo en cuenta la relación y solo dijo que los días de trabajo eran mayores.

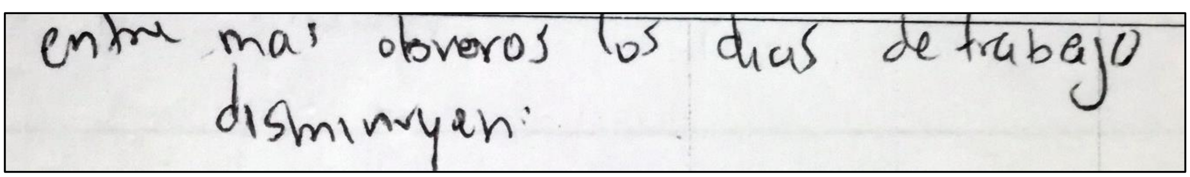


Gráfico 62. Respuesta a la situación 3, ítem 7.1

En la figura se puede observar como los estudiantes comprenden una relación inversa, 18 argumentaron que entre más obreros los días de trabajo disminuyen.

Ítem 7.2)

En este ítem 10 estudiantes escribieron y explicaron una razón con los datos de la tabla, 3 solo escribieron la razón pero no la explicaron, 7 estudiantes intentaron explicar una razón pero sin escribirla, después se les pregunto a los jóvenes que había pasado con esa respuesta, ellos argumentaron que fue falta de atención en la pregunta.

Gráfico 63. Respuesta a la situación 3, ítem 7.2

En imagen muestra como los jóvenes comprenden el concepto de razón, que se está reforzando en el desarrollo de las secuencias. El estudiante tiene claro que un obrero trabaja 30 días en la razón planteada.

Ítem 7.3)

Solo un estudiante contesto bien este ítem, 3 les falto igualar las razones, 5 no contestaron, al preguntarles porque dejaron en blanco, argumentaron que sabían cómo se formaban la proporción pero al intentar escribirlas no les daban las multiplicaciones y 15 estudiantes contestaron mal, ellos intentaron formar las proporciones pero no verificaron la propiedad fundamenta de las proporciones.

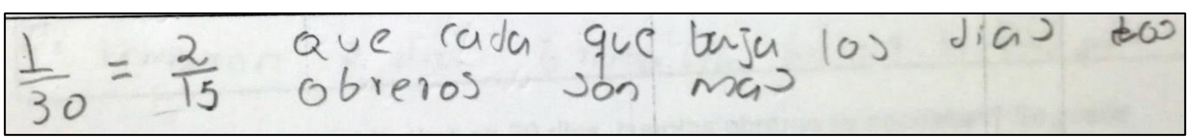


Gráfico 64. Respuesta a la situación 3, ítem 7.3

En la imagen se puede apreciar el error que cometieron los estudiantes, las dos razones están bien formadas, pero no la proporción.

<u>Devolución</u>

Los estudiantes tienen duda con este ítem, preguntan que si se forma una proporción como las anteriores, se les recomienda comprobar el producto de los extremos y medios

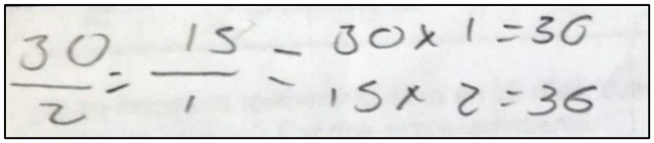


Gráfico 65. Respuesta a la situación 3, ítem 7.3

En esta imagen se observa la proporción que plantea un estudiante, él la formó verificando el producto de los extremos.

Ítem 7.5)

8 estudiantes contestaron acertadamente, utilizaron la regla de tres para resolver el problema, ellos argumentaron que cuando relacionaron los datos les quedo fácil utilizar la regla de tres para magnitudes inversas; 1 estudiante relación los datos pero no los solucione, 4 dejaron en blanco y 9 se equivocaron utilizando el proceso para magnitudes directas.

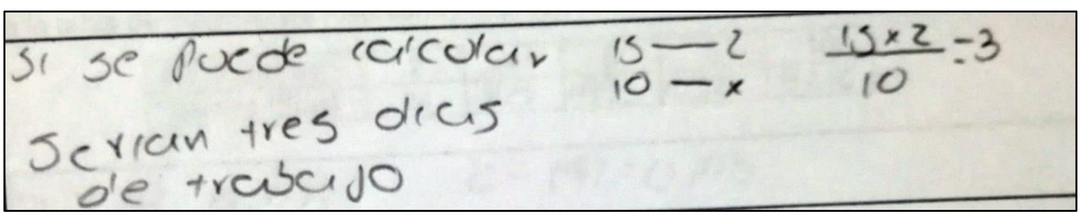


Gráfico 66. Respuesta a la situación 3, ítem 7.5

En la imagen se observa el proceso que hizo el 36,36% de los estudiantes, escribieron los datos, formaron la proporción y la resolvieron de forma correcta.

Ítem 7.7)

En este ítem 8 estudiantes hallaron la constante pero no explicaron su uso, un estudiante calculo la constante de proporcionalidad y explicó como la podría utilizar, 4 estudiantes no acertaron con la respuesta y 9 la dejaron en blanco porque no sabían cómo explicar la pregunta.

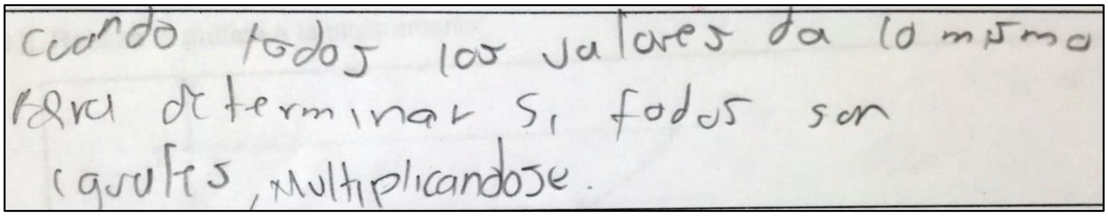

cuando todos los valores da lo mismo
para determinar si todos son
iguales, multiplicandose.

Gráfico 67. Respuesta a la situación 3, ítem 7.7

En la imagen se puede observar que el estudiante tiene una idea de cómo hallar la constante de proporcionalidad, él se refiere a que se deben de multiplicar y explica que todos los valores dan lo mismo. Un problema que se evidencio con los estudiantes fue que ellos podrían tener la idea de algo pero les costaba escribirla, no sabían cómo plasmar lo que pensaban con palabras.

Actividad en grupo

9) Completa la tabla de magnitudes inversamente proporcionales, indica el proceso

No. Pintores	2	4	6	8	10
Tiempo (días)	24				

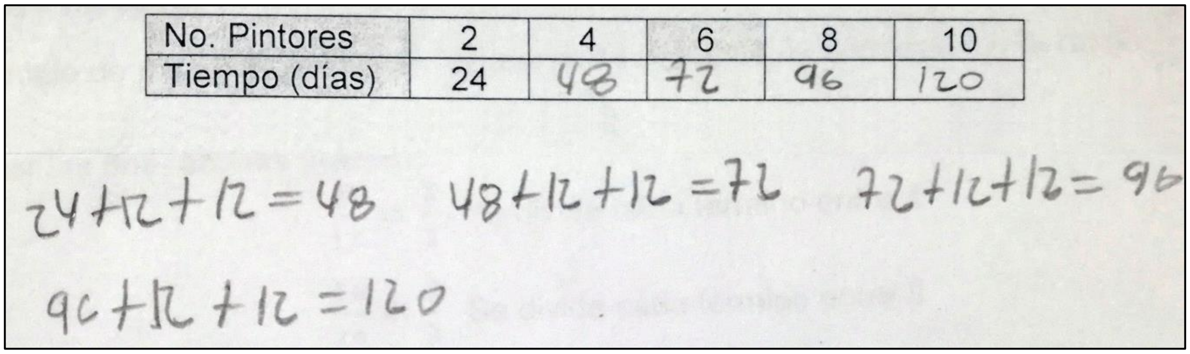
9.1) ¿Cómo se calcula la constante de proporcionalidad?

9.2) Realiza la gráfica a la tabla anterior

9.3) ¿Qué significa la razón 2/24?

Ítem 9)

Un grupo lleno bien la tabla, otro grupo parcialmente, dos dejaron en blanco y tres grupos la llenaron de forma equivocada.



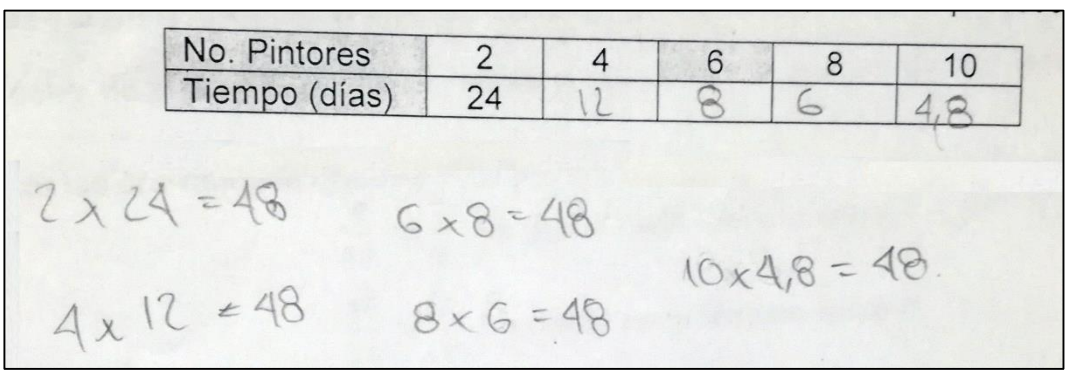
No. Pintores	2	4	6	8	10
Tiempo (días)	24	48	72	96	120

$24+12+12=48$ $48+12+12=72$ $72+12+12=96$

$96+12+12=120$

Gráfico 68. Respuesta a la situación 3, ítem 9

En la imagen se observa el proceso que realizó uno de los tres grupos que no completaron bien la tabla, los estudiantes del grupo no tuvieron en cuenta el comportamiento de las variables y llenaron la tabla sumando 24 en cada posición. Cuando se les pregunto porque hicieron esto, ellos argumentaron que los datos debían crecer de forma constante.



No. Pintores	2	4	6	8	10
Tiempo (días)	24	12	8	6	4,8

$2\times24=48$ $6\times8=48$ $10\times4,8=48$

$4\times12=48$ $8\times6=48$

Gráfico 69. Respuesta a la situación 3, ítem 9

Un grupo contesto satisfactoriamente, los estudiantes sabían que el producto debía dar lo mismo y de esa forma completaron la tabla.

Ítem 9.1)

El 71,43% de los grupos contestaron mal, el 14,29% lo hizo bien, otro 14,29% lo dejo incompleto; los 5 grupos que fallaron fueron porque en vez de multiplicar los valores de las magnitudes los dividieron. Solo un grupo realizó los productos y calculo la constante de proporcionalidad, como se aprecia en la figura:

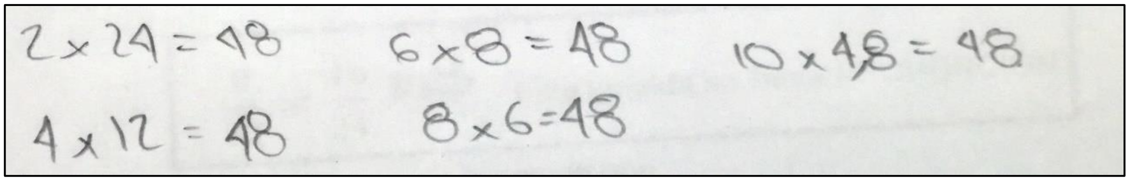


Gráfico 70. Respuesta a la situación 3, ítem 9.1

Ítem 9.2)

El 57,14% de los grupos fallaron en la respuesta, el 14,29% lo hizo de forma adecuada. Solo un grupo realizó bien la gráfica con la información presentada en la tabla, 4 grupos fallaron en la elaboración de la gráfica, la mayoría de ellos se equivocaron al escribir los valores de los ejes vertical y horizontal.

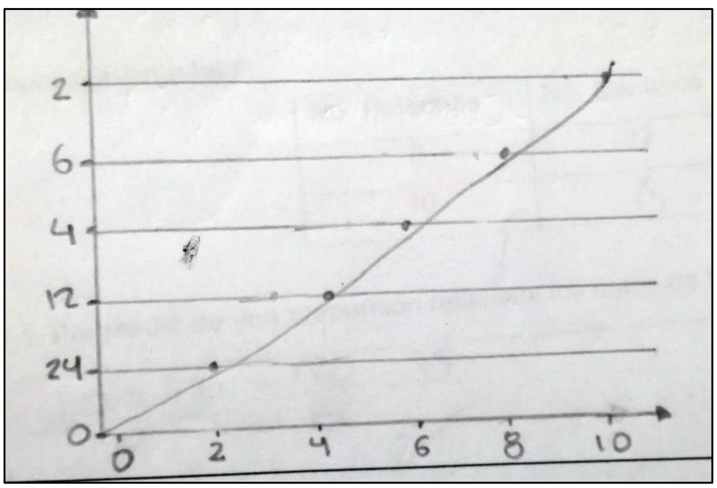


Gráfico 71. Respuesta a la situación 3, ítem 9.2

En la gráfica se puede apreciar el error que cometieron 3 de los 4 grupos que fallaron en este ítem, al escribir los datos en el eje vertical no tuvieron en cuenta que estuvieran de forma creciente, tampoco tuvieron presente que la gráfica es una curva. Después los estudiantes comentaron que no se dieron en cuenta por las ganas de terminar las actividades.

Ítem 9.3)

El 71,43% de los grupos contestaron bien este ítem, el 14,29% falló en la respuesta; 5 grupos supieron interpretar la razón dada, los estudiantes argumentaron que interpretar las razones es sencillo, que solo tienen que mirar los datos en la tabla y escribir que significan.

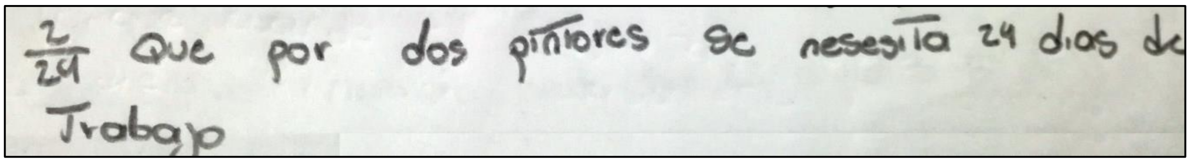


Gráfico 72. Respuesta a la situación 3, ítem 9.3

En la gráfica se puede observar una respuesta correcta de uno de los grupos, para su interpretación los estudiantes dicen que solo necesitan saber que significa cada uno de los términos de la razón y escribir el numerador y el denominador con lo que representan.

ANEXO 15

La siguiente información indica el número de alumnos o grupos que llegaron a:

C. Respuestas correctas.

I. Respuestas incorrectas.

P. Respuestas en proceso.

B. Respuestas en blanco.

Tabla 33.

Calificación cuantitativa secuencia sobre Proporcionalidad

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1.1	18	94,74	0	0,00	1	5,26	0	0,00
1.2	4	21,05	8	42,11	2	10,53	5	26,32
1.3	11	57,89	3	15,79	0	0,00	5	26,32
1.4	7	36,84	5	26,32	6	31,58	1	5,26
1.5	16	84,21	2	10,53	1	5,26	0	0,00
1.6	14	73,68	4	21,05	1	5,26	0	0,00
1.7	14	73,68	5	26,32	0	0,00	0	0,00
1.8	9	47,37	2	10,53	5	26,32	3	15,79
2.1	15	78,95	0	0,00	0	0,00	4	21,05
2.2	0	0,00	11	57,89	1	5,26	7	36,84
2.3	8	42,11	4	21,05	7	36,84	0	0,00
2.4	2	10,53	2	10,53	10	52,63	5	26,32
2.5	11	57,89	7	36,84	0	0,00	1	5,26
2.6	11	57,89	7	36,84	0	0,00	1	5,26
2.7	9	47,37	8	42,11	0	0,00	2	10,53
2.8	5	26,32	6	31,58	4	21,05	4	21,05
3.1	10	52,63	6	31,58	1	5,26	2	10,53
3.2	7	36,84	10	52,63	0	0,00	2	10,53
3.3	13	68,42	3	15,79	1	5,26	2	10,53
3.4	15	78,95	2	10,53	0	0,00	2	10,53
4.1 Grupo	5	71,43	1	14,29	0	0,00	1	14,29
4.2 Grupo	5	71,43	1	14,29	0	0,00	1	14,29
5 Grupo	3	42,86	1	14,29	2	28,57	1	14,29

La secuencia didáctica sobre Proporcionalidad se inicia con 19 alumnos, se dan las indicaciones iniciales de la forma de trabajo individual y grupal; para el trabajo grupal se forman cinco grupos de tres estudiantes y dos grupos de dos. El desarrollo de la secuencia cuenta con cinco ítems, tres para trabajar individual y dos en grupo. Se divide el trabajo en cuatro partes, cada parte de una hora, en las primeras dos horas trabajan individual para realizar la primera fase de la ingeniería, en las siguientes dos horas trabajan en grupo para efectuar las fases de validación, formulación e institucionalización entre estudiantes y el docente. En las situaciones planteadas se pone énfasis en las variables microdidácticas VMT-1d y VMT-1i.

Actividad Individual

1) La siguiente tabla representa el precio por metros de tela.

Metros de tela	Precio de la tela
2	$9.000
4	$18.000
5	$22.500
7	$31.500
9	$40.500
12	$54.000

1.4) Escribe una proporción con los siguientes datos de la tabla

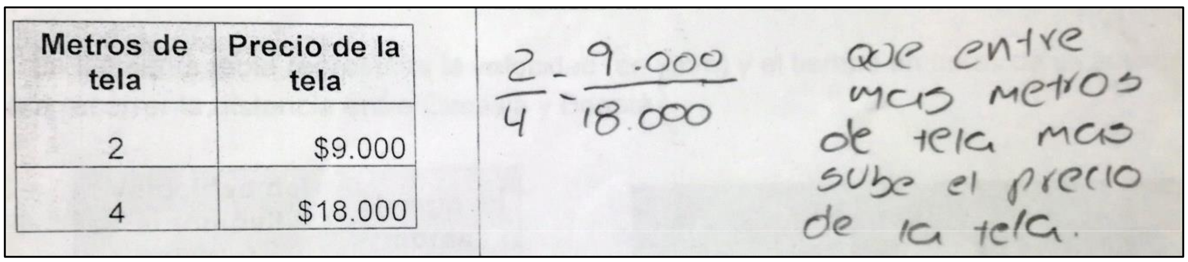
1.5) Si 2 metros de tela cuestan $9.000. ¿Cuánto costaran 6 metros?

1.7) Si 12 metros de tela cuestan $54.000. ¿Cuánto metros de tela se pueden comprar con $90.000?

1.8) Observa la siguiente proporción $\frac{2}{15} = \frac{\$9.000}{x}$. Existe algún procedimiento general que permita resolver estos problemas.

Ítem 1.4)

El 36,84% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 31,84% les faltó precisión, el 26,32% fallaron en la respuesta; 7 estudiantes representaron adecuadamente la proporción con los datos de la tabla, 6 escribieron las razones pero les faltó igualarlas, 5 colocaron mal la proporción y un estudiante no contesto. Cuando se les pregunto a los jóvenes porque habían fallado en esta respuesta, ellos dijeron que pensaban que la tenían bien, pero después del análisis en grupo se percataron del error y lo corrigieron en el análisis posterior.



Metros de tela	Precio de la tela
2	$9.000
4	$18.000

$\frac{2}{4} = \frac{9.000}{18.000}$

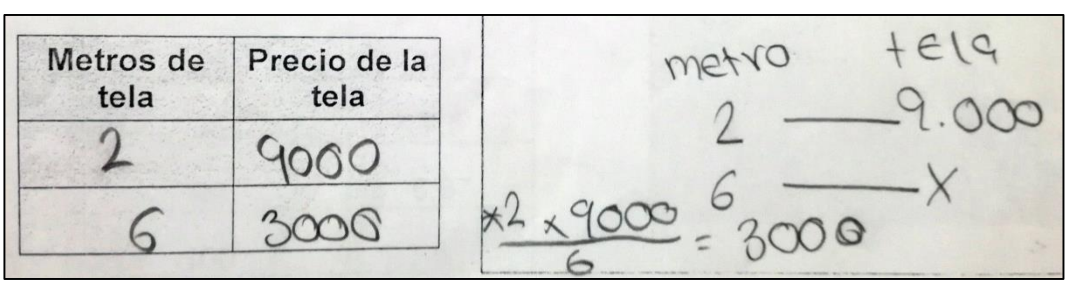
que entre mas metros de tela mas sube el precio de la tela.

Gráfico 73. Respuesta a la situación 4, ítem 1.4

En la imagen se observa la respuesta de un estudiante a este ítem, la proporción aparece de forma correcta y se explica el comportamiento de las variables.

Ítem 1.5)

El 84,21% de los estudiantes contestaron bien, 10,53% fallaron en la respuesta y el 5,26% expresó bien la proporción pero fallaron en la operación; 16 estudiantes llegaron a la respuesta correcta por medio de la regla de tres directa, 2 estudiantes aplicaron mal la regla y 1 estudiante aplico bien la regla pero fallo en el cálculo del termino desconocido.



Metros de tela	Precio de la tela
2	9000
6	3000

metro tela
2 —— 9.000
6 —— X

$\frac{2 \times 9000}{6} = 3000$

Gráfico 74. Respuesta a la situación 4, ítem 1.5

En la imagen se observa que inicialmente se relacionan bien los valores de las magnitudes, pero al momento de aplicar la técnica de la regla de tres directa el estudiante se confunde y resuelve el ejercicio con una regla de tres inversa.

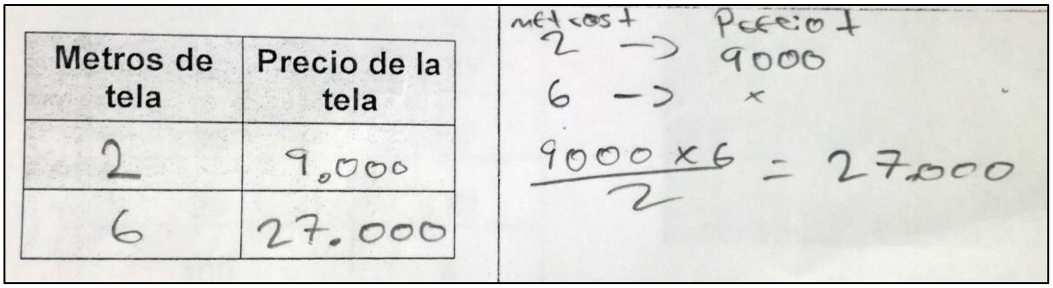


Gráfico 75. Respuesta a la situación 4, ítem 1.5

En esta imagen el estudiante utilizando los datos de la tabla inicial, relaciona bien los valores de las magnitudes y aplica correctamente la técnica de regla de tres directa para hallar el dato desconocido.

Ítem 1.7)

El 73,68% de los estudiantes responden bien este ítem, el 26,32% falla en la respuesta; 16 estudiantes relacionan bien los valores de las magnitudes y por medio de una regla de tres directa hallan el dato desconocido, 5 estudiantes relacionan bien los datos pero aplican mal la técnica.

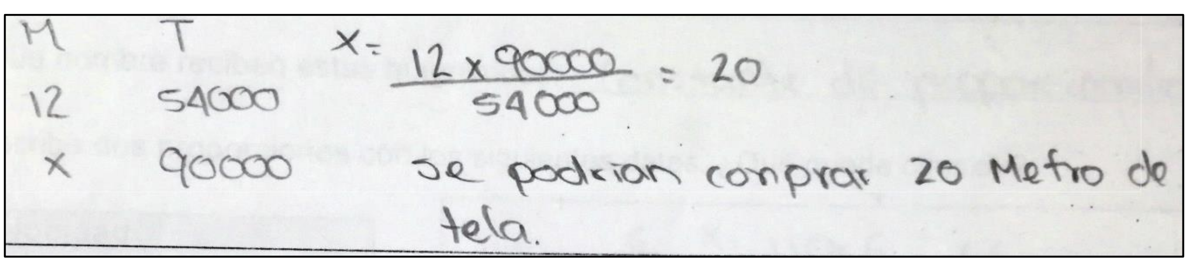


Gráfico 76. Respuesta a la situación 4, ítem 1.7

En la imagen se observa la respuesta correcta que da un estudiante, él relaciona los valores de las magnitudes y aplica correctamente la regla de tres directa. La mayoría de los estudiantes dijeron que estos problemas eran muy sencillos, que los datos se podían calcular de forma fácil.

Ítem 1.8)

El 47,37% de los estudiantes contestaron bien, el 26,32% relacionaron bien los datos pero les faltó explicar el procedimiento, el 10,53% falló en la respuesta y el 15,79% no contesto.

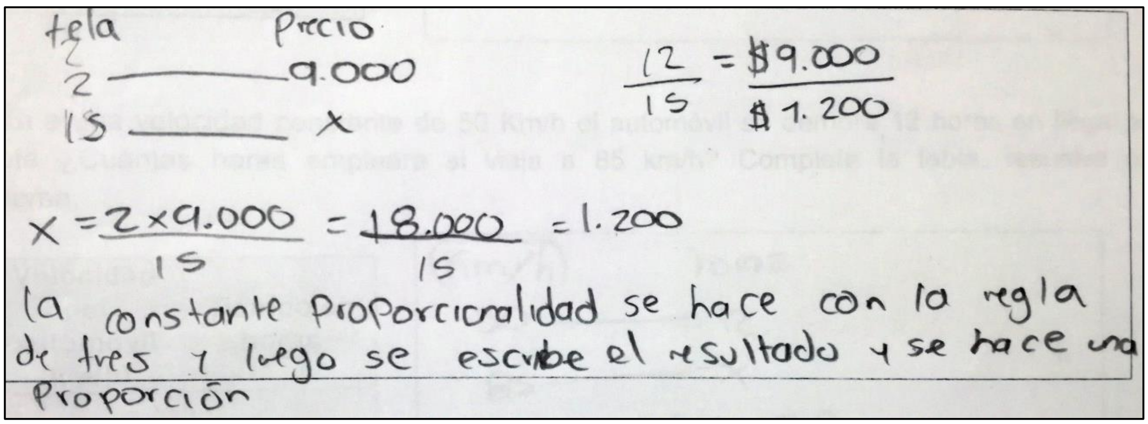


Gráfico 77. Respuesta a la situación 4, ítem 1.8

En la imagen se observa una de las dos respuestas equivocadas que dieron los estudiantes, aquí se relacionan bien los valores de las magnitudes, pero se utiliza el procedimiento de regla de tres inversa para hallar el dato desconocido. Al preguntarle al estudiante porque resolvió el ejercicio de esa forma, él dice que fue por falta de leer bien la pregunta y porque de esa forma era más fácil.

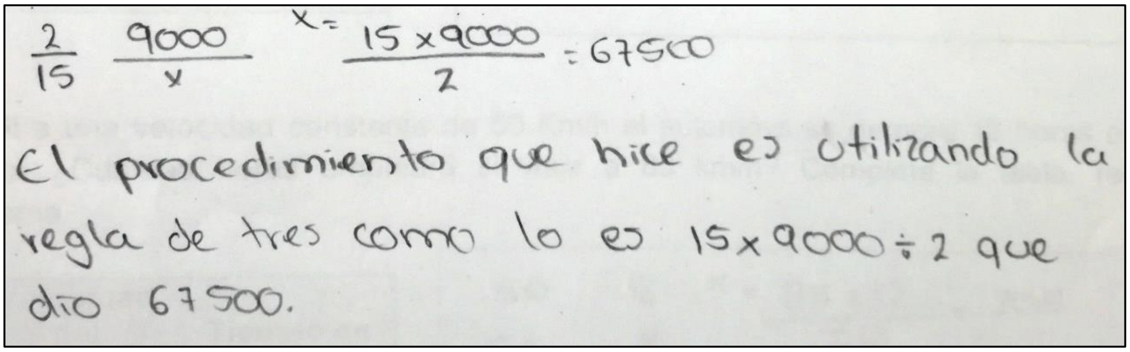


Gráfico 78. Respuesta a la situación 4, ítem 1.8

En esta imagen se aprecia el procedimiento de 1 de los 9 estudiantes que contestaron bien, el joven relaciona bien los datos, soluciona el ejercicio y explica el procedimiento general para resolver estas situaciones; 5 estudiantes hallan el termino desconocido, pero no explican el procedimiento general para hacerlo.

<u>Analisis de los resultados en grupo del ítem 1</u>

Después que los estudiantes desarrollaron la situación 1 en forma individual, se forman los grupos de trabajo establecidos con anterioridad por el docente. Conformados los grupos, empezaron a comparar las respuestas que habían obtenido en su trabajo individual. Los resultados cualitativos y cuantitativos de las respuestas se aprecian en las siguientes tablas:

Tabla 34.
Resultados cualitativos de la situación 4, ítem 1

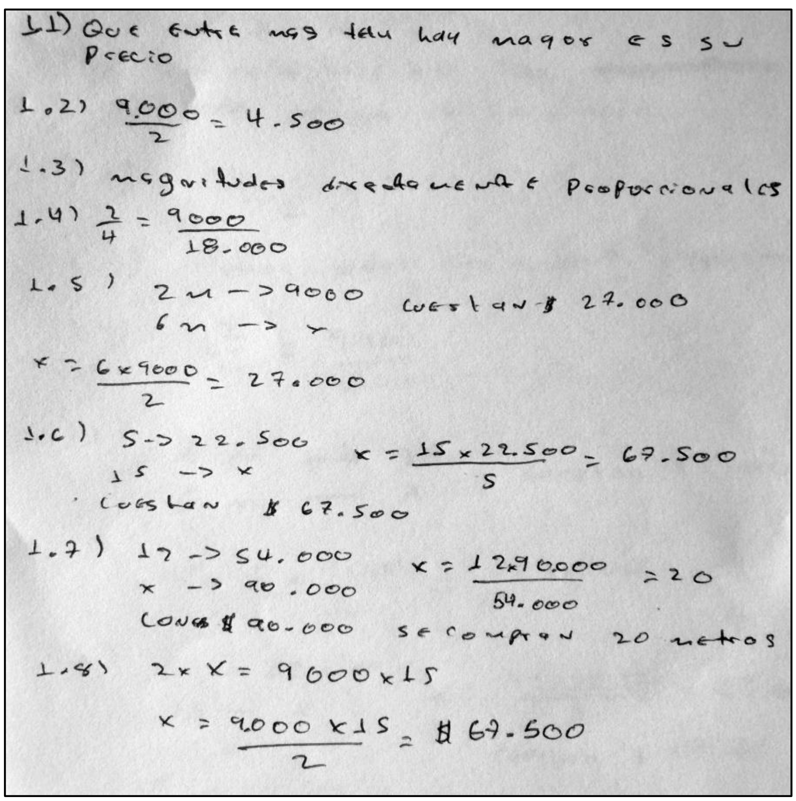
GRADO 8-9	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
GRUPO 1	P	I	I	I	P	P	I	I
GRUPO 2	C	P	C	C	C	C	C	C
GRUPO 3	C	C	C	C	C	C	C	C
GRUPO 4	C	B	C	C	C	C	C	C
GRUPO 5	C	I	B	P	C	I	C	B
GRUPO 6	C	C	C	C	C	C	C	P
GRUPO 7	C	I	C	P	C	C	C	I

Tabla 35.

Resultados cualitativos de la situación 4, ítem 1

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje
1.1	6	85,71	0	0,00	1	14,29	0	0,00
1.2	2	28,57	3	42,86	1	14,29	1	14,29
1.3	5	71,43	1	14,29	0	0,00	1	14,29
1.4	4	57,14	1	14,29	2	28,57	0	0,00
1.5	6	85,71	0	0,00	1	14,29	0	0,00
1.6	5	71,43	1	14,29	1	14,29	0	0,00
1.7	6	85,71	1	14,29	0	0,00	0	0,00
1.8	3	42,86	2	28,57	1	14,29	1	14,29

Todos los integrantes en cada grupo, compararon y examinaron los resultados obtenidos en el trabajo individual. Las respuestas a todos los puntos del ítem 1 fueron escritas después de debatir y corregir los errores.


1.1) Que entre mas tela hay mayor es su precio

1.2) $\frac{9.000}{2} = 4.500$

1.3) magnitudes directamente proporcionales

1.4) $\frac{2}{4} = \frac{9000}{18.000}$

1.5) 2m -> 9000 cuestan $ 27.000
6m -> x

$x = \frac{6 \times 9000}{2} = 27.000$

1.6) 5 -> 22.500 $x = \frac{15 \times 22.500}{5} = 67.500$
15 -> x
cuestan $ 67.500

1.7) 12 -> 54.000 $x = \frac{12 \times 90.000}{54.000} = 20$
x -> 90.000
con $ 90.000 se compran 20 metros

1.8) $2 \times X = 9000 \times 15$

$x = \frac{9000 \times 15}{2} = \$\,67.500$

Gráfico 79. Respuesta a la situación 4, ítem 1

En la figura se observan las respuestas que un grupo dio a todos los puntos del ítem 1. Los puntos con menos dudas fueron 1.1, 1.5 y 1.7, donde el 85,71% de los grupos contestaron acertadamente y el 14,29% estaban cerca de la respuesta correcta. En general, los estudiantes manejan el concepto de regla de tres y lo saben utilizar en la solución de problemas del entorno.

El punto que mayor dificultad presentó fue el 1.2, donde solo 2 grupos contestaron bien, 1 grupo estuvo cerca, 3 grupos fallaron y 1 grupo dejo en blanco; la dificultad que presentó el 42,82% de los grupos en este punto, fue porque dividieron el término menor entre el mayor y dejaron como constante de proporcionalidad 0,0.

2. La siguiente tabla representa la velocidad (en km/h) y el tiempo en horas de un automóvil para recorrer la distancia entre Circasia y Bogotá.

Velocidad (km/h)	Tiempo en horas
50	12
60	10
70	8,57
80	7,5
90	6,67
100	6

2.5) Si a una velocidad constante de 50 Km/h el automóvil se demora 12 horas en llegar a Bogotá ¿Cuántas horas empleara si viaja a 85 km/h?

2.7) Si a una velocidad constante de 100 Km/h el automóvil se demora 6 horas en llegar a Bogotá ¿A Cuántos km/h debe viajar el automóvil para demorarse 4 horas?

Ítem 2.5)

El 57,89% de los estudiantes contestaron bien, el 36,84% contestaron mal; 11 jóvenes relacionaron bien los valores de las magnitudes y utilizaron adecuadamente la regla de tres inversa para hallar el dato desconocido, los 7 estudiantes que fallaron fue porque solucionaron el ejercicio por medio de una regla de tres directa o realizaron mal la operación aritmética.

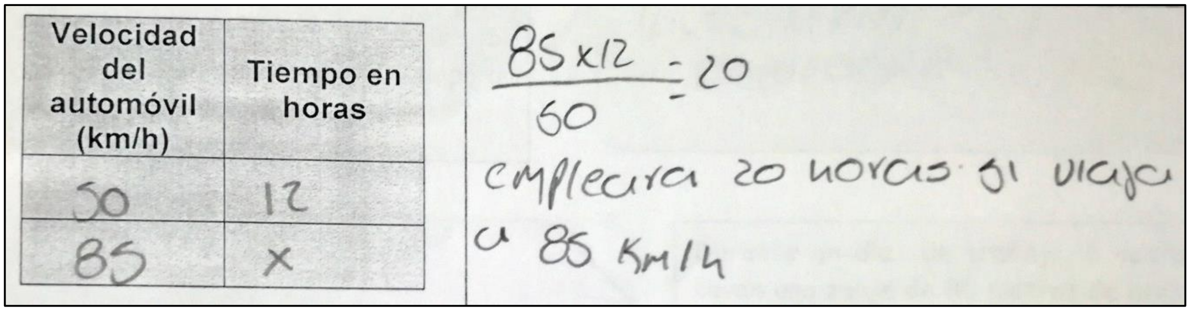


Gráfico 80. Respuesta a la situación 4, ítem 2.5

En la figura se observa como un estudiante relaciona bien los datos de las magnitudes pero utiliza el procedimiento equivocado para hallar la respuesta al ejercicio. Después se le pregunta al estudiante porque a mayor velocidad se demora más tiempo, el joven responde que no había analizado la respuesta, pero se dio cuenta de su error cuando estaba confrontando sus respuestas con los compañeros.

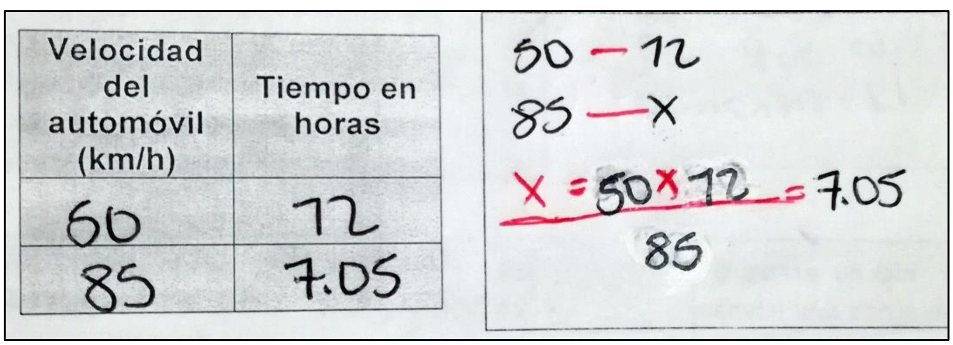


Gráfico 81. Respuesta a la situación 4, ítem 2.5

En esta imagen se observa el proceso que realizó uno de los once estudiantes que contestaron bien la pregunta. Para él los ejercicios de regla de tres son sencillos y esto le permitió ayudar a sus compañeros en el momento de confrontación en grupo.

Ítem 2.7)

El 47,37% de los estudiantes respondieron acertadamente, el 42,11% falló en la respuesta; 8 estudiantes relacionaron bien los datos, pero al momento de hallar el término desconocido utilizaron regla de tres directa, como se puede apreciar en la figura:

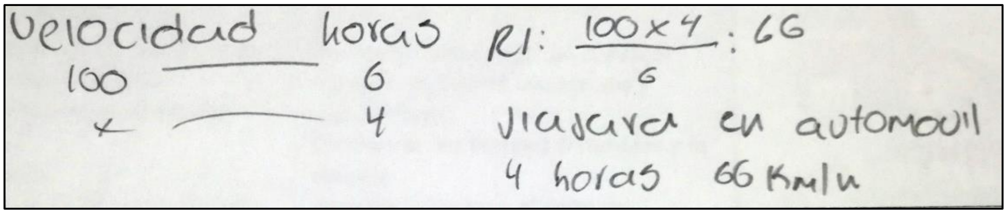


Gráfico 82. Respuesta a la situación 4, ítem 2.7

Muchos de los errores que cometieron los estudiantes en el trabajo individual, fueron resueltos cuando confrontaron respuestas en el trabajo en grupo. Gran parte de las dudas se resolvieron en las fases de validación e institucionalización.

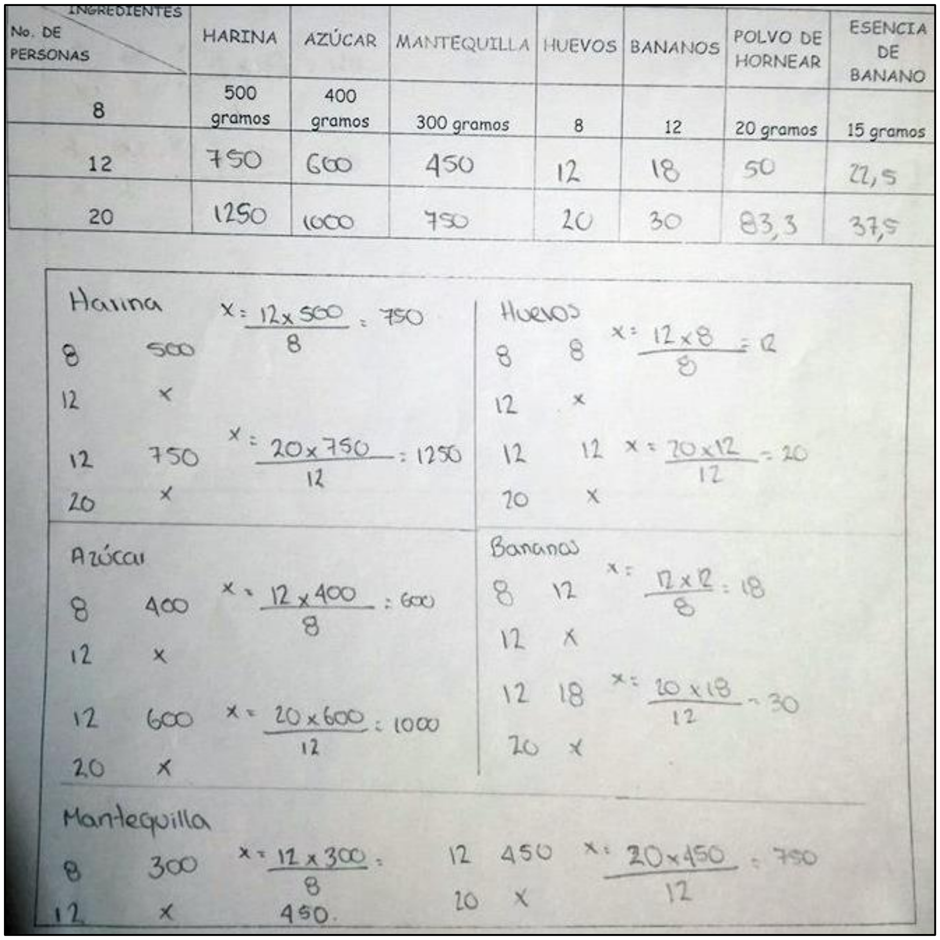
<u>Actividad en grupo</u>

4) Completar la siguiente tabla para determinar la cantidad de ingredientes que se necesita para la torta, de acuerdo con el número de personas que comerán.

INGREDIENTES / No. DE PERSONAS	HARINA	AZÚCAR	MANTEQUILLA	HUEVOS	BANANOS	POLVO DE HORNEAR	ESENCIA DE BANANO
8	500 gramos	400 gramos	300 gramos	8	12	20 gramos	15 gramos
12							
20							

Ítem 4)

El 71,43% de los grupos contestan satisfactoriamente este ítem, 5 grupos relacionan bien los valores de las magnitudes y hallan los términos desconocidos. En la figura se observa el procedimiento utilizado por uno de los grupos para llenar todos los datos de la tabla, en cada punto emplearon una regla de tres directa para encontrar el dato desconocido; los alumnos que tenían dudas con el proceso, en este punto las aclararon, la mayoría de los estudiantes dijeron que este ejercicio era sencillo, aunque un poco largo.



INGREDIENTES / No. DE PERSONAS	HARINA	AZÚCAR	MANTEQUILLA	HUEVOS	BANANOS	POLVO DE HORNEAR	ESENCIA DE BANANO
8	500 gramos	400 gramos	300 gramos	8	12	20 gramos	15 gramos
12	750	600	450	12	18	50	22,5
20	1250	1000	750	20	30	83,3	37,5

Harina
8 500
12 x
$x = \frac{12 \times 500}{8} = 750$
12 750
20 x
$x = \frac{20 \times 750}{12} = 1250$

Huevos
8 8
12 x
$x = \frac{12 \times 8}{8} = 12$
12 12
20 x
$x = \frac{20 \times 12}{12} = 20$

Azúcar
8 400
12 x
$x = \frac{12 \times 400}{8} = 600$
12 600
20 x
$x = \frac{20 \times 600}{12} = 1000$

Bananos
8 12
12 x
$x = \frac{12 \times 12}{8} = 18$
12 18
20 x
$x = \frac{20 \times 18}{12} = 30$

Mantequilla
8 300
12 x
$x = \frac{12 \times 300}{8} = 450$
12 450
20 x
$x = \frac{20 \times 450}{12} = 750$

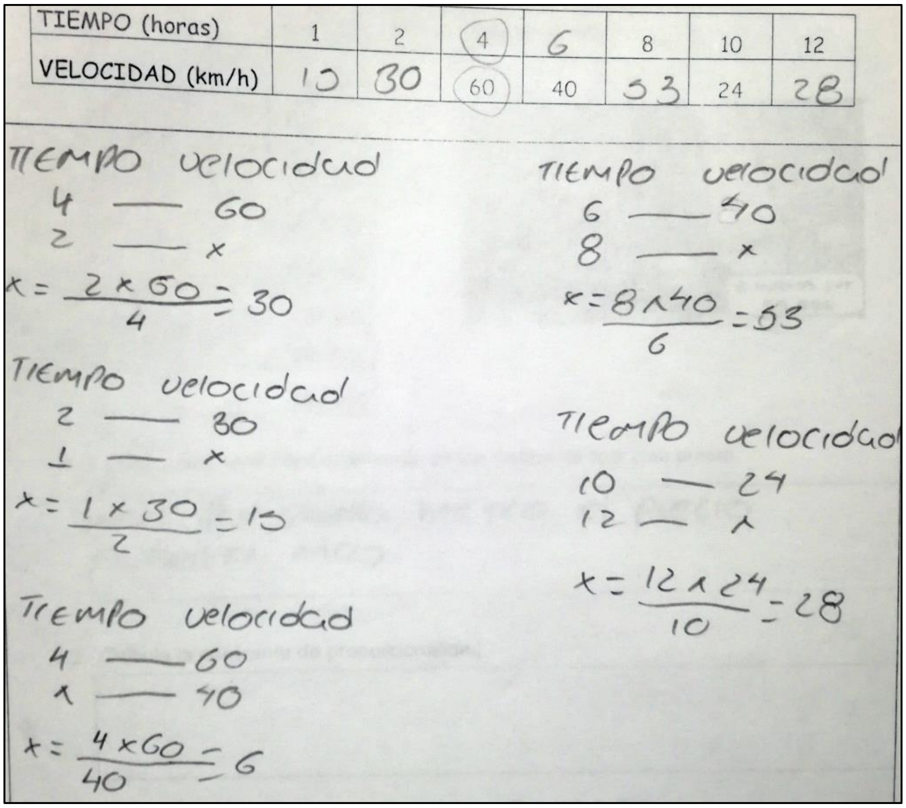
Gráfico 83. Respuesta a la situación 4, ítem 4

5) Completa la siguiente tabla que representa la velocidad en que se viaja para ir de Circasia a Manizales y el tiempo empleado. Escribe todo el procedimiento.

TIEMPO (horas)	1	2	4		8	10	12
VELOCIDAD (km/h)			60	40		24	

Ítem 5)

El 42,86% de los grupos contestaron bien este ítem, el 28,57% no lo terminaron a pesar de ir bien en el proceso, el 14,29% falló en la respuesta y el otro 14,29% no respondió. El grupo que no contesto dijo que fue por falta de tiempo, pero sabían cómo hacer el ejercicio, 3 grupos llenaron adecuadamente la tabla con el proceso respectivo y dos grupos no completaron la tabla, pero los datos que tenían estaban bien realizados.



TIEMPO (horas)	1	2	4	6	8	10	12
VELOCIDAD (km/h)	15	30	60	40	53	24	28

Gráfico 84. Respuesta a la situación 4, ítem 5

En la imagen se observa el procedimiento que realizó el grupo que contesto mal este ítem, se aprecia que los datos están bien relacionados, pero al momento de hallar el termino desconocido, utilizan la regla de tres directa en vez de la regla de tres inversa.

ANEXO 16

La siguiente información indica el número de alumnos o grupos que llegaron a:

C. Respuestas correctas.

I. Respuestas incorrectas.

P. Respuestas en proceso.

B. Respuestas en blanco.

Tabla 36.

Calificación cuantitativa secuencia sobre Porcentajes

ITEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1	18	94,74	0	0,00	1	5,26	0	0,00
2.1	12	63,16	7	36,84	0	0,00	0	0,00
2.2	7	36,84	11	57,89	1	5,26	0	0,00
2.3	8	42,11	7	36,84	3	15,79	1	5,26
2.4	2	10,53	3	15,79	11	57,89	3	15,79
2.5	10	52,63	5	26,32	3	15,79	1	5,26
3.1	10	52,63	5	26,32	3	15,79	1	5,26
3.2	11	57,89	5	26,32	1	5,26	2	10,53
3.3	3	15,79	6	31,58	9	47,37	1	5,26
3.4	10	52,63	5	26,32	2	10,53	2	10,53
3.5	9	47,37	5	26,32	1	5,26	4	21,05
4.1 Grupo	5	83,33	1	16,67	0	0,00	0	0,00
4.2 Grupo	5	83,33	1	16,67	0	0,00	0	0,00
4.3 Grupo	4	66,67	1	16,67	1	16,67	0	0,00
4..4 Grupo	4	66,67	1	16,67	1	16,67	0	0,00
5.1 Grupo	3	50,00	0	0,00	3	50,00	0	0,00
5.2 Grupo	1	16,67	0	0,00	3	50,00	2	33,33

La secuencia didáctica sobre Porcentajes se inicia con 19 alumnos, se dan las indicaciones iniciales de la forma de trabajo individual y grupal; para el trabajo grupal se forman cinco grupos de tres estudiantes y un grupos de cuatro. El desarrollo de la secuencia cuenta con cinco ítems, tres para trabajar individual y dos en grupo. Se divide el trabajo en cuatro partes, cada parte de una hora, en las primeras dos horas trabajan individual para realizar la primera fase de la ingeniería, en las siguientes dos horas trabajan en grupo para efectuar las fases de validación, formulación e institucionalización entre estudiantes y el docente. En las situaciones planteadas se pone énfasis en las variables microdidácticas VMT-1d y VMT-1i.

Actividad Individual

1) Completa la siguiente tabla:

PORCENTAJE	CÓMO SE LEE	RAZÓN (operador)	EXPRESIÓN DECIMAL
30%			
			0,60
	Veinticinco por ciento		
7%			
		$\frac{15}{100}$	

Ítem 1)

18 estudiantes completaron correctamente la tabla, solo uno no realizó el último renglón; El 94,74% de los jóvenes saben pasar un porcentaje a su expresión decimal y expresarlo como razón. Esto nos indica que los estudiantes posen Presaberes adecuados con respecto al concepto de porcentajes.

PORCENTAJE	CÓMO SE LEE	RAZÓN (operador)	EXPRESIÓN DECIMAL
30%	treinta por ciento	$\frac{30}{100}$	0,3
60%	secenta por ciento	$\frac{60}{100}$	0,60
25%	Veinticinco por ciento	$\frac{25}{100}$	0,25
7%	siete por ciento	$\frac{7}{100}$	0,07
15%	quince por ciento	$\frac{15}{100}$	0,15

Gráfico 85. Respuesta a la situación 5, ítem 1

En la figura se observa el procedimiento correcto que hicieron los estudiantes para completar la tabla, ellos argumentaron que esta ítem era fácil de hacer porque el tema lo han utilizado mucho en estadística; todos los jóvenes comprenden el porcentaje como expresión decimal.

2) Calcular el porcentaje de los siguientes enunciados:
   2.1) 25 mangos de 200 están dañados
   2.3) De 120 racimos de plátano, 8 están afectados por insectos

Ítem 2.1)

El 63,16% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 36,84% fallaron en la respuesta; 12 estudiantes relacionaron el total de mangos con el 100% y utilizaron una regla de tres directa para calcular el porcentaje pedido; 7 estudiantes respondieron mal al no relacionar el total de mangos con el 100% o utilizar mal la regla de tres.

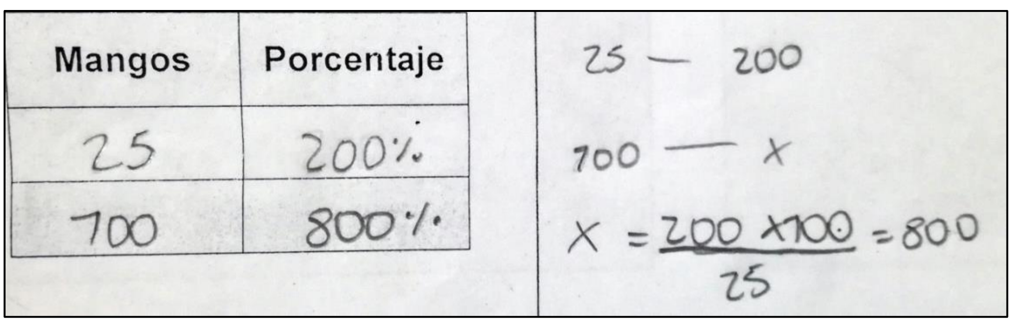


Gráfico 86. Respuesta a la situación 5, ítem 2.1

En la figura se puede apreciar el procedimiento incorrecto que hace un estudiante para responder este ítem, el joven relaciona los 25 mangos con un 200% y luego calcula el resultado para 100 mangos, varios estudiantes cometieron el mismo error.

Devolución

Los estudiantes tienen dudas con este enunciado, se les sugiera analizar a que porcentaje corresponden los 200 mangos. Los estudiantes comprenden la relación y resuelven el ejercicio utilizando una regla de tres.

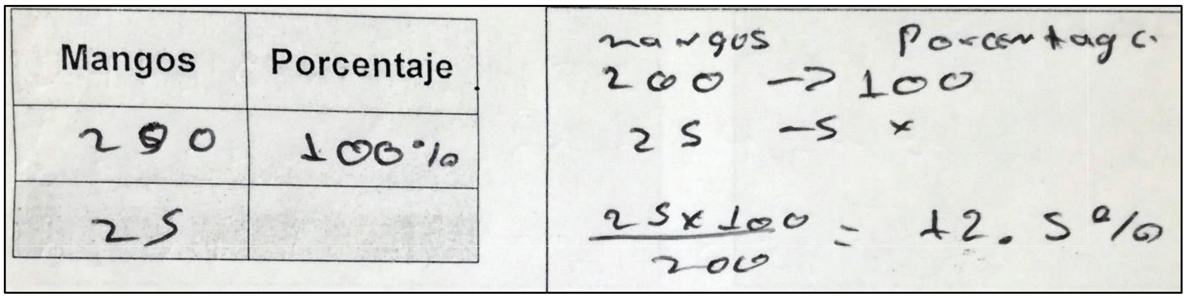


Gráfico 87. Respuesta a la situación 5, ítem 2.1

En la imagen se observa el procedimiento correcto que hizó el estudiante al igualar los 200 mangos con el 100%, luego utiliza la regla de tres directa para hallar el porcentaje de los 25 mangos.

Ítem 2.3)

El 42,11% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 36,84% fallaron en la respuesta, el 15,79% plantearon bien el ejercicio pero no lo terminaron y el 5,26% lo dejó en blanco. En la siguiente imagen se observa como un estudiante relaciona por medio de una regla de tres el total de racimos de plátanos con los 8 infestados y el 100% lo toma como racimos de plátanos, también soluciona mal la regla de tres al aplicar el proceso como si las magnitudes fueran inversas.

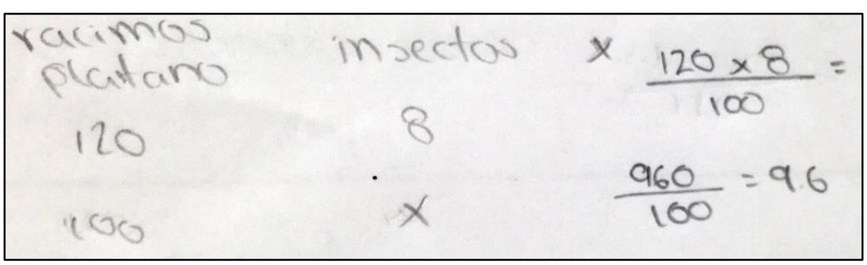


Gráfico 88. Respuesta a la situación 5, ítem 2.3

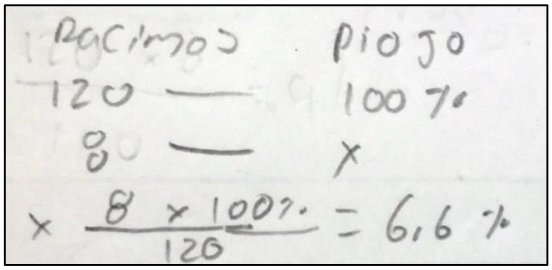


Gráfico 89. Respuesta a la situación 5, ítem 2.3

En la imagen se observa el procedimiento correcto que hizo un estudiante para solucionar el ítem, el joven relaciona el total de racimos de plátanos con el 100% y calcula por medio de la regla de tres directa el porcentaje para los 8 racimos.

3) Calcular los siguientes porcentajes:
   - 3.1) El 20% de 500
   - 3.2) El 0,75% de 2.000.000
   - 3.3) Explica el procedimiento utilizado para calcular los porcentajes anteriores
   - 3.4) ¿Qué cantidad se obtiene al aumentar 15.000 en un 25%?
   - 3.5) ¿Qué cantidad se obtiene al disminuir 22.000 en un 30%?

Ítem 3,1)

El 52,63% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 15,79% no lo terminaron pero lo plantearon bien, el 26,32% realizaron mal el proceso y el 5,26% lo dejó en blanco. En la siguiente imagen se observa uno de los procedimientos erróneos que hicieron los estudiantes que se equivocaron en el proceso, aquí el estudiante realiza el cálculo al revés y multiplica por 100 y divide por 500.

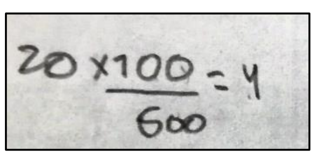


Gráfico 90. Respuesta a la situación 5, ítem 3.1

<u>Devolución</u>

Los estudiantes tienen dudas con este ejercicio, algunos preguntan qué se debe hacer con el porcentaje, se les sugiere tomar el porcentaje dado como una parte del total y analicen como afecta a la unidad.

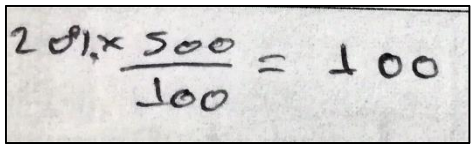


Gráfico 91. Respuesta a la situación 5, ítem 3.1

En la imagen se observa el procedimiento correcto realizado por un estudiante, el joven multiplica la unidad 500 por el 20% y divide entre 100% para dar el resultado correcto.

Ítem 3.2)

11 estudiantes contestaron bien este ítem, 1 lo dejo planteado, 2 lo dejaron en blanco y 5 lo resolvieron mal. Los estudiantes que lo dejaron en blanco respondieron que no sabían que hacer, los que se equivocaron multiplicaron por 100 y dividieron entre el valor dado, hicieron el proceso contrario.

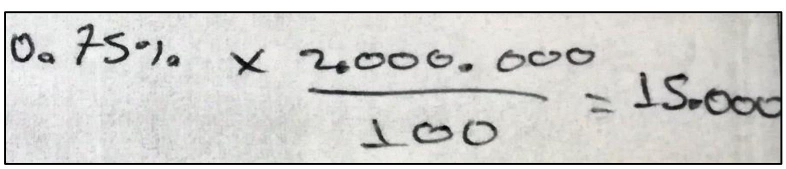


Gráfico 92. Respuesta a la situación 5, ítem 3.2

En la imagen se observa el procedimiento correcto que realizó el 57,89% de los estudiantes, ellos tienen claro la operación que se debe hacer cuando necesitan hallar el porcentaje de una cantidad dada, posteriormente en el trabajo en grupo comparten con sus compañeros este conocimiento.

Ítem 3.3)

El 15,79% de los estudiantes contestaron bien el ítem, el 47,37% tenían idea de cómo resolver estos porcentajes pero les faltó concretar y el 26,32% no supieron plasmar en palabras el procedimiento correcto.

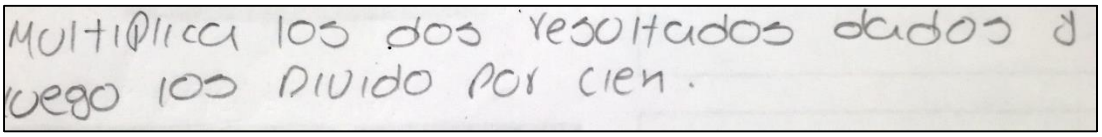

Multiplica los dos resultados dados y luego los divido por cien.

Gráfico 93. Respuesta a la situación 5, ítem 3.3

En la imagen se observa la respuesta que dieron 3 estudiantes, donde escriben el proceso para resolver este tipo de ejercicios, se evidencia que estos jóvenes manejan bien el concepto y al momento de trabajar en grupo el conocimiento será compartido.

Ítem 3.4)

EL 52,63% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 10,53% lo dejó en proceso, el 26,32% falló en la respuesta; 2 estudiantes solo calcularon el porcentaje y no lo sumaron al total, 5 estudiantes aplicaron mal el porcentaje.

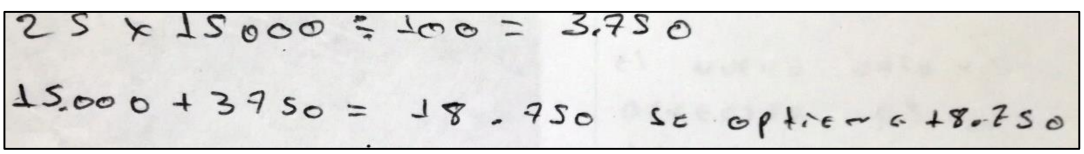

25 x 15000 ÷ 100 = 3.750
15.000 + 3750 = 18.750 se optiene 18.750

Gráfico 94. Respuesta a la situación 5, ítem 3.4

En la figura se observa la respuesta correcta que dan 10 estudiantes, ellos calculan el porcentaje y luego el resultado lo suman al total. Posteriormente al momento de trabajar en grupo este proceso se extiende a los demás compañeros.

Ítem 3.5)

El 47,37% de los estudiantes contestaron bien, el 5,26% solo calculó el porcentaje, el 26,32% falló en la respuesta; los 5 estudiantes que fallaron aplicaron mal el porcentaje al valor dado, multiplicaron por 100 y dividieron entre 30, algunos solo dejaron hasta ahí, otros le restaron luego el valor dado.

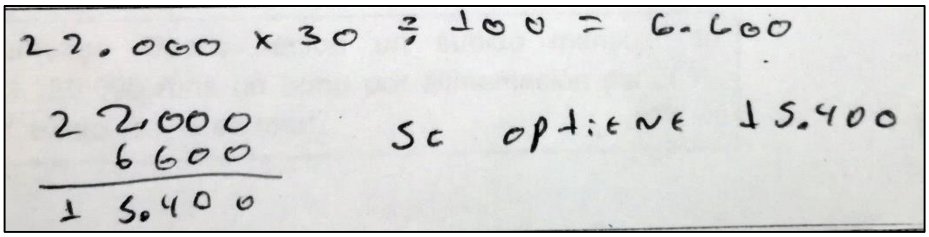


Gráfico 95. Respuesta a la situación 5, ítem 3.5

En la figura se observa el procedimiento de un estudiante, calcula el porcentaje y luego el resultado se lo resta al total, de esta forma contestan el ítem 9 estudiantes. Un estudiante llegó en el ejercicio solo hasta el valor del porcentaje, al preguntarle porque no lo había restado al total, dijo que fue por falta de leer bien la pregunta.

Analisis de los resultados en grupo del ítem 3

Después que los estudiantes desarrollaron la situación 3 en forma individual, se forman los grupos de trabajo establecidos con anterioridad por el docente. Conformados los grupos, empezaron a comparar las respuestas que habían obtenido en su trabajo individual. Los resultados cualitativos y cuantitativos de las respuestas se aprecian en las siguientes tablas:

Tabla 37.
Resultados cualitativos de la situación 5, ítem 3

GRADO 8	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
GRUPO 1	C	I	I	I	I
GRUPO 2	C	C	I	C	C
GRUPO 3	I	I	I	C	C
GRUPO 4	C	C	C	C	C
GRUPO 5	C	C	C	C	C
GRUPO 6	C	C	P	P	I

Tabla 38.
Resultados cualitativos de la situación 5, ítem 3

ITEM	**CORRECTO**		**INCORRECTO**		**EN PROCESO**		**EN BLANCO**	
	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje
3.1	5	83,33	1	16,67	0	0,00	0	0,00
3.2	4	66,67	2	33,33	0	0,00	0	0,00
3.3	2	33,33	3	50,00	1	16,67	0	0,00
3.4	4	66,67	1	16,67	1	16,67	0	0,00
3.5	4	66,67	2	33,33	0	0,00	0	0,00

Todos los integrantes en cada grupo, compararon y examinaron los resultados obtenidos en el trabajo individual. Las respuestas a todos los puntos del ítem 1 fueron escritas después de debatir y corregir los errores.

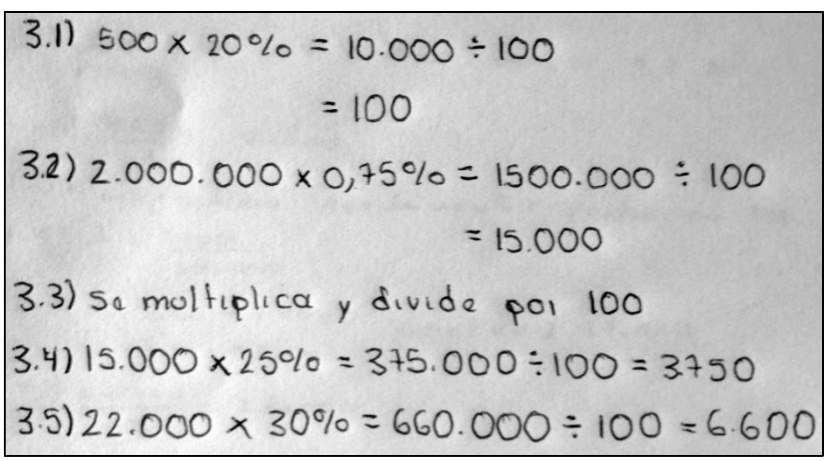

3.1) 500 x 20% = 10.000 ÷ 100
= 100
3.2) 2.000.000 x 0,75% = 1500.000 ÷ 100
= 15.000
3.3) Se multiplica y divide por 100
3.4) 15.000 x 25% = 375.000 ÷ 100 = 3750
3.5) 22.000 x 30% = 660.000 ÷ 100 = 6.600

Gráfico 96. Respuesta a la situación 5, ítem 3

El la imagen se aprecian las respuestas que dio un grupo al ítem 3, el punto con menos dudas fue el 3.1, con un 83,33% de respuestas positivas, aquí 5 grupos hallaron adecuadamente el porcentaje dado, los estudiantes comentaron que este punto era sencillo, que hallar porcentajes es muy fácil.

El punto que presento mayor dificultad fue el 3.3, donde solo el 33,33% de los grupos contestaron bien, el 16,67% estuco cerca de la respuesta y el 50% de los grupos no supieron explicar, de nuevo, a pesar que los estudiantes saben el concepto, les queda difícil explicar el procedimiento. En los dos últimos puntos se observa que el grupo solo calculó el porcentaje, pero no lo sumo o resto al total.

Actividad en grupo

4) Observa las siguientes imágenes y calcula el nuevo valor de lo ofrecido

4.1)

4.3)

Ítem 4.1)

El 83,33% de los grupos contestaron bien este ítem, el 16,67% falló en la respuesta. 5 grupos realizaron el proceso correcto, calcularon el porcentaje y este valor se lo restaron al total del precio de la camiseta. Un solo grupo realizó mal el proceso, aunque calculó bien el porcentaje, a ese resultado le resto 20, luego se le pregunta a uno de los estudiantes porque realizaron esa resta, dijo que fue por falta de atención, que al momento de confrontar resultados se dio cuenta del error, en la siguiente figura se ilustra la situación:

$$Y = \frac{48.000 \times 20}{100} = 9600 - 20 = 9580$$

Gráfico 97. Respuesta a la situación 5, ítem 4.1

Ítem 4,3)

El 66,67% de los grupos contestaron bien este ítem, el 16,67% solo calculó el porcentaje y el 16,67% falló en la respuesta. Un grupo calculo bien el porcentaje, pero no sumo este valor al precio de los zapatos, otro grupo calculó bien el porcentaje, pero a este valor le resto de nuevo el valor del porcentaje (19).

$$\frac{160000 \times 19}{100} = 30.400$$

$$160000 + 30.400 =$$

$$190.400$$

Gráfico 98. Respuesta a la situación 5, ítem 4.3

En la figura se observa el proceso que realizaron 4 grupos de trabajo, ellos identificaron bien el porcentaje, lo calcularon y ese valor se lo sumaron al precio delos zapatos.

ANEXO 17

La siguiente información indica el número de alumnos o grupos que llegaron a:

C. Respuestas correctas.

I. Respuestas incorrectas.

P. Respuestas en proceso.

B. Respuestas en blanco.

Tabla 39.

Calificación cuantitativa secuencia sobre Proporcionalidad Geométrica

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje	No. Estudiantes	Porcentaje
1.1	16	80,00	0	0,00	2	10,00	2	10,00
1.2	19	95,00	0	0,00	1	5,00	0	0,00
1.3	11	55,00	1	5,00	1	5,00	7	35,00
2	15	75,00	2	10,00	1	5,00	2	10,00
3.1	19	95,00	0	0,00	0	0,00	1	5,00
3.2	18	90,00	0	0,00	0	0,00	2	10,00
3.3	1	5,00	2	10,00	12	60,00	5	25,00
3.4	17	85,00	0	0,00	1	5,00	2	10,00
3.5	14	70,00	0	0,00	0	0,00	6	30,00
4	16	80,00	1	5,00	2	10,00	1	5,00
4.1	13	65,00	1	5,00	5	25,00	1	5,00
4.2	8	40,00	9	45,00	0	0,00	3	15,00
4.3	10	50,00	6	30,00	1	5,00	3	15,00
4.4	15	75,00	1	5,00	2	10,00	2	10,00
5.1 Grupo	6	100,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
5.2 Grupo	2	33,33	0	0,00	3	50,00	1	16,67
6.1	12	60,00	3	15,00	3	15,00	2	10,00
6.2	13	65,00	4	20,00	2	10,00	1	5,00
6.3	13	65,00	3	15,00	1	5,00	3	15,00
6.4	1	5,00	1	5,00	10	50,00	8	40,00
7.1 Grupo	5	83,33	0	0,00	1	16,67	0	0,00
7.2 Grupo	4	66,67	1	16,67	1	16,67	0	0,00
7.3 Grupo	1	16,67	3	50,00	1	16,67	1	16,67
7.4 Grupo	6	100,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
7.5 Grupo	3	50,00	1	16,67	1	16,67	1	16,67
7.6 Grupo	3	50,00	0	0,00	3	50,00	0	0,00

7.7 Grupo	2	33,33	3	50,00	1	16,67	0	0,00
8	10	50,00	0	0,00	3	15,00	7	35,00
8.1	9	45,00	1	5,00	1	5,00	9	45,00
8.2	5	25,00	1	5,00	1	5,00	13	65,00
8.3	5	25,00	1	5,00	3	15,00	11	55,00

La secuencia didáctica sobre Proporcionalidad Geométrica se inicia con 20 alumnos, se dan las indicaciones iniciales de la forma de trabajo individual y grupal; para el trabajo grupal se forman cuatro grupos de tres estudiantes y dos grupos de cuatro. El desarrollo de la secuencia cuenta con ocho ítems, seis para trabajar individual y dos en grupo. Se divide el trabajo en cinco partes, cada parte de una hora, en las primeras tres horas trabajan individual para realizar la primera fase de la ingeniería, en las siguientes dos horas trabajan en grupo para efectuar las fases de validación, formulación e institucionalización entre estudiantes y el docente. En las situaciones planteadas se pone énfasis en las variables microdidácticas VMG-RS, VMG-PS, VMG-SF y VMG-T.

Actividad Individual

1. (Segmentos) Observa los siguientes segmentos de recta:

$\overline{AB}$ = 4 cm

$\overline{CD}$ = 6 cm

1.1) Calcula la razón entre los segmentos, simplifica el resultado: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = -$

Ítem 1.1)

El 80% de los estudiantes respondieron satisfactoriamente, el 10% escribió la razón pero no simplificó y otro 10% dejo en blanco; 16 jóvenes demostraron que comprenden el concepto de razón entre segmentos al hallar la relación entre las medidas de los dos segmentos, en la figura se evidencia el proceso realizado por ellos:

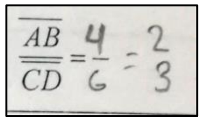


Gráfico 99. Respuesta a la situación 6, ítem 1.1

2. Tenemos los siguientes segmentos:

   $\overline{AB}$ = 6 cm

   $\overline{CD}$ = 10 cm

   $\overline{EF}$ = ?

   $\overline{GH}$ = 15 cm

   ¿Cuánto debe medir el segmento $\overline{EF}$ para poder formar una proporción? Escribe la Proporción, halla la medida del segmento $\overline{EF}$ y dibújalo.

Ítem 2)

El 75% de los estudiantes contestaron bien, el 5% escribió la proporción pero no hayó la longitud del segmento, el 10% contesto mal al no escribir de forma correcta la proporción y el 10% dejo en blanco porque tenían dudas con este ejercicio.

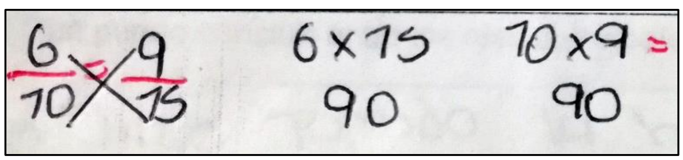
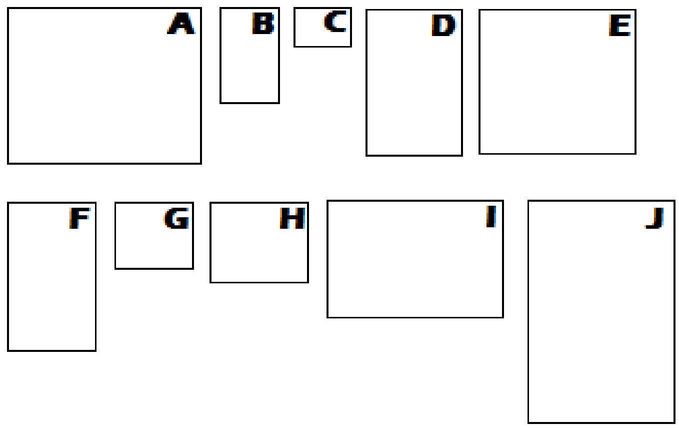


Gráfico 100. Respuesta a la situación 6, ítem 2

En la figura se observa el proceso que realiza un estudiante, escribe la proporción con las medidas de los segmentos, verifica el resultado por medio de la propiedad fundamental de las proporciones; de esta manera, 15 estudiantes demuestran que comprenden el concepto de proporción entre segmentos.

3) (Semejanza) Se le entrega a los estudiantes una colección de rectángulos para que los agrupen de acuerdo a la forma, aunque tengan distinto tamaño (Fiol M. p. 124).



3.2) Calcular la razón entre el largo y el ancho de cada rectángulo, simplifica

3.4) Forma las proporciones con las medidas de los rectángulos SEMEJANTES

Ítem 3,2)

El 90% de los estudiantes llenaron la tabla de forma correcta, el 10% lo dejó en blanco. En la actividad sobre rectángulos semejantes, todos los estudiantes recortaron los rectángulos, midieron sus lados y escribieron las medidas del largo y ancho de cada uno de ellos. La actividad les pareció sencilla a los jóvenes y les agrado porque estaban trabajando con material manipulable, a la vez que reforzaban el tema de razón entre segmentos.

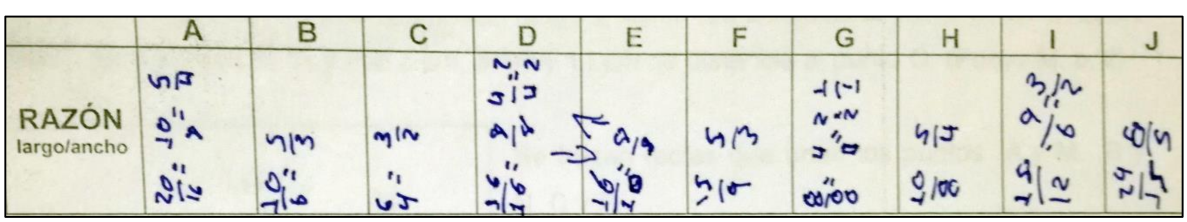


Gráfico 101. Respuesta a la situación 6, ítem 3.2

En la figura se observa el proceso que realizó 1 de los 18 estudiantes que llenaron correctamente la tabla. Después de tomar las medidas de los rectángulos, los estudiantes escribieron la razón entre el largo y el ancho, luego simplificaron los datos que tenían.

Ítem 3,4)

El 85% de los estudiantes llenaron bien la tabla, un 5% les faltó los dos últimos puntos y el 10% dejó en blanco. En la actividad los estudiantes debían encontrar los rectángulos semejantes, primero a simple vista tomando de a dos rectángulos, los tenían que acercar y alejar uno sobre el otro hasta que el rectángulo pequeño cubriera al grande completamente. Esta actividad fue llamativa e innovadora para los jóvenes, todos trabajaron y demostraron interés en el tema

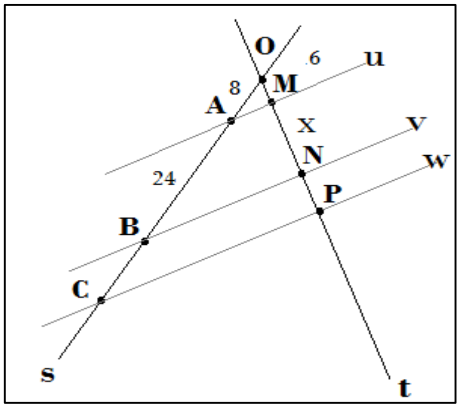
RECTÁNGULOS	A - H	B - F	C - I	E - G	D - J
PROPORCIÓN	$\frac{20}{16} = \frac{10}{8}$	$\frac{10}{6} = \frac{15}{9}$	$\frac{6}{4} = \frac{18}{12}$	$\frac{16}{16} = \frac{8}{8}$	$\frac{16}{10} = \frac{24}{15}$

Gráfico 102. Respuesta a la situación 6, ítem 3.4

En la figura se observa el segundo método para encontrar los rectángulos semejantes, después que los estudiantes hallaron la razón entre las medidas del largo y ancho de cada rectángulo, debían emparejar aquellas razones que fueran iguales para formar las proporciones. En esta actividad los estudiantes comprendieron la semejanza de figuras de acuerdo a la proporcionalidad de sus lados.

Actividad en grupo

5) Para cada uno de los ejercicios establece una proporción con los segmentos y halla el lado que falta (X).



Ítem 5.1)

El 100% de los grupos contestaron correctamente este ítem, los estudiantes platearon una proporción con la medida de los segmentos o una regla de tres directa para resolver este ejercicio. Los jóvenes argumentaron que esta pregunta era muy encilla y fácil de resolver utilizando una regla de tres

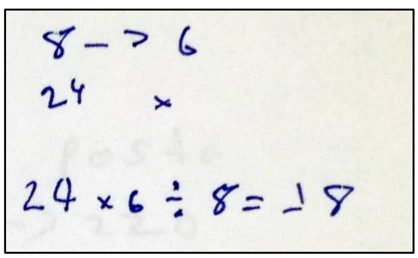


Gráfico 103. Respuesta a la situación 6, ítem 5.1

En la imagen se aprecia el procedimiento correcto que hizó uno de los grupos para resolver este ejercicio, los 6 grupos demostraron que conocían la relación entre las medidas de los lados de los triángulos y aplicaron varios criterios para solucionarlo.

Actividad Individual

6.1) Calcular la altura del poste.

- Medir la longitud de la sombra del poste (a) y la longitud de la sombra de la silla (b)
- Medir la altura de la silla
- Realiza un dibujo de la situación y ubica las medidas. Utilizando el teorema de Thales calcula la longitud del poste (X).

Ítem 6.1)

El 60% de los estudiantes contestaron bien este ítem, el 15% lo plantearon pero no lo solucionaron, dejaron planteada la proporción, el 15% se equivocaron y el 10% dejó en blanco porque no alcanzaron a tomar los datos; 3 estudiantes realizaron el dibujo y ubicaron bien las medidas, pero al momento de hallar la altura del poste relacionaron mal los valores, en la siguiente figura se ilustra esta situación:

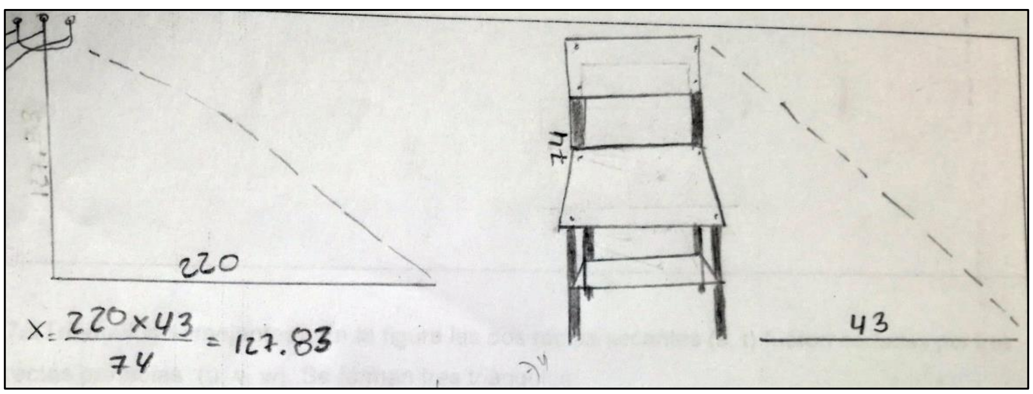


Gráfico 104. Respuesta a la situación 6, ítem 6.1

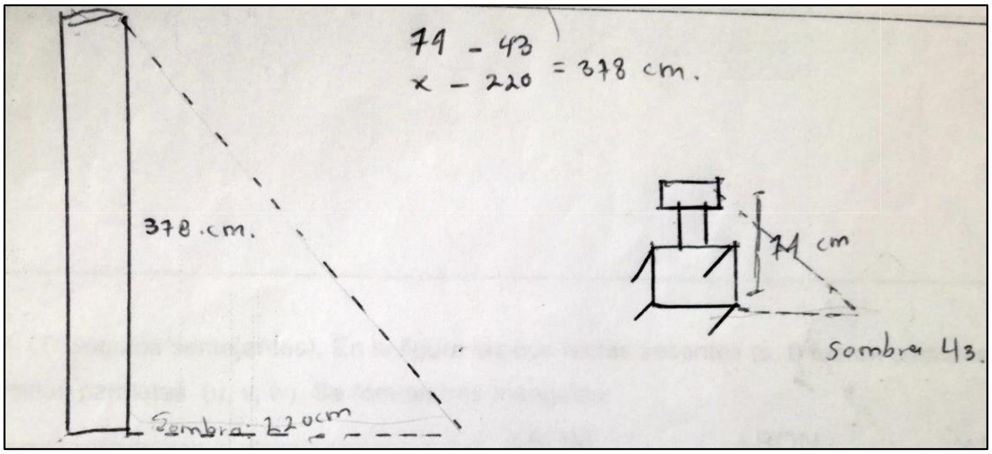


Gráfico 105. Respuesta a la situación 6, ítem 6.1

En la figura se observa el proceso que realizó un estudiante para resolver este ítem. La actividad consistía en salir al patio con un metro, tomar las medidas de la altura de la silla, su sombra y la sombra del poste, con estos datos establecer una proporción entre estos valores y calcular la altura del poste. Fueron 12 estudiantes los que contestaron bien, ellos formaron la proporción o por medio de una regla de tres hallaron el dato faltante

6.3) Encuentre la altura de un árbol, tomando en cuenta que la estatura de un hombre es de 1.8 m y a cierta hora de un día soleado su sombra de 1.2 m, y en ese mismo momento la sombra del árbol es de 3 m de longitud. Realiza el dibujo

Ítem 6.3)

El 65% de los estudiantes respondieron de forma correcta; el 5% realizó bien el dibujo, ubicó de forma correcta los valores, planteó la proporción, pero dudó de la forma en cómo debía multiplicarlos y optó por dejarlo planteado; el 15% se equivocó al multiplicar de forma incorrecta los valores de las medidas dadas y el otro 15% dejo en blanco porque dudaban del proceso que debían hacer.

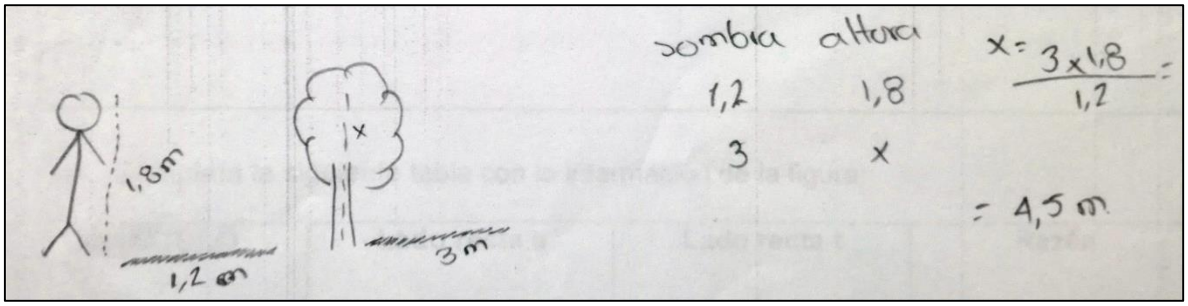


Gráfico 106. Respuesta a la situación 6, ítem 6.3

En la figura se observa el proceso que realizó un estudiante, de esta manera, fueron 13 jóvenes los que contestaron bien, ellos relacionaron de forma correcta los valores de las medidas dadas y por medio de una regla de tres directa encontraron el dato faltante

Analisis de los resultados en grupo del ítem 6

Después que los estudiantes desarrollaron la situación 6 en forma individual, se forman los grupos de trabajo establecidos con anterioridad por el docente. Conformados los grupos, empezaron a comparar las respuestas que habían obtenido en su trabajo individual. Los resultados cualitativos y cuantitativos de las respuestas se aprecian en las siguientes tablas:

Tabla 40.
Resultados cualitativos de la situación 6, ítem 6

GRADO 8	6.1	6.2	6.3	6.4
GRUPO 1	C	C	C	I
GRUPO 2	C	C	C	B
GRUPO 3	P	C	C	P
GRUPO 4	C	C	C	P
GRUPO 5	C	C	C	P
GRUPO 6	C	C	I	P

Tabla 41.
Resultados cuantitativos de la situación 6, ítem 6

ÍTEM	CORRECTO		INCORRECTO		EN PROCESO		EN BLANCO	
	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje	No. Grupos	Porcentaje
6.1	5	83,33	0	0,00	1	16,67	0	0,00
6.2	6	100,00	0	0,00	0	0,00	0	0,00
6.3	5	83,33	1	16,67	0	0,00	0	0,00
6.4	0	0,00	1	16,67	4	66,67	1	16,67

Todos los integrantes en cada grupo, compararon y examinaron los resultados obtenidos en el trabajo individual. Las respuestas a todos los puntos del ítem 1 fueron escritas después de debatir y corregir los errores.

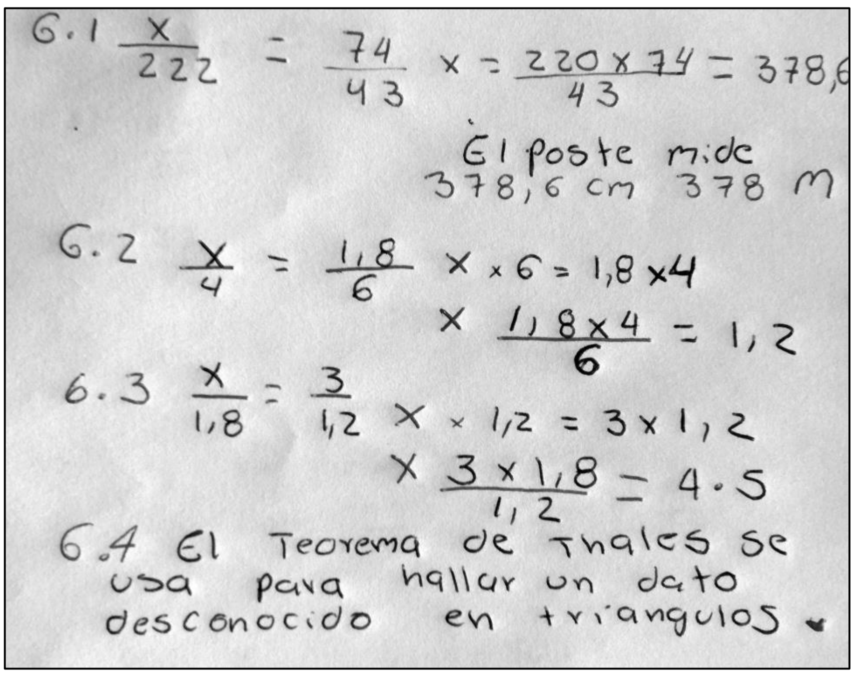

6.1 $\frac{x}{222} = \frac{74}{43}$ $x = \frac{220 \times 74}{43} = 378,6$
El poste mide
378,6 cm 378 m
6.2 $\frac{x}{4} = \frac{1,8}{6}$ $x \times 6 = 1,8 \times 4$
x $\frac{1,8 \times 4}{6} = 1,2$
6.3 $\frac{x}{1,8} = \frac{3}{1,2}$ $x \times 1,2 = 3 \times 1,2$
x $\frac{3 \times 1,8}{1,2} = 4.5$
6.4 El Teorema de Thales se usa para hallar un dato desconocido en triangulos

Gráfico 107. Respuesta a la situación 6, ítem 6

En la figura se observan los resultados que escribió un grupo a los puntos del ítem 6. El ítem con mejor desempeño fue el 6.2, donde el 100% de los grupos contestaron bien, los 6 grupos realizaron bien la gráfica del ejercicio y hallaron el término desconocido por medio de una proporción, tal como aparece en la imagen. En general en este tipo de problemas los estudiantes tuvieron buen desempeño, comprendieron el concepto, formaron las proporciones con los datos y calcularon los términos desconocidos.

De nuevo el ítem con mayor dificultad es donde los estudiantes deben explicar algún procedimiento, en el ítem 6,4, solo 4 grupos se acercan a una definición del teorema de Thales, pero les falta precisar con más detalle.

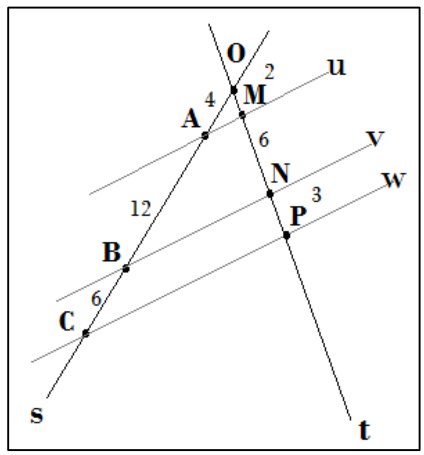
<u>Actividad en grupo</u>

7) (Triángulos semejantes). En la figura las dos rectas secantes (s, t) fueron cortadas por tres rectas paralelas (u, v, w). Se forman tres triángulos:

7.4) Por medio de una razón, relaciona los lados de los triángulos.

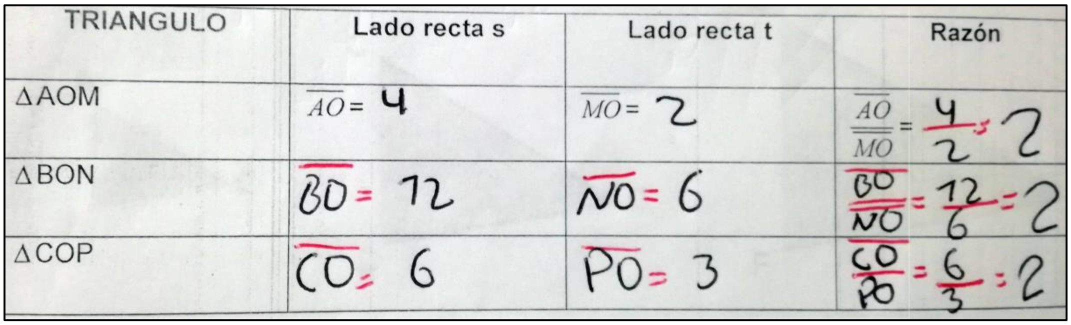
7.6) Forma tres proporciones con los resultados anteriores.

7.7) ¿Qué se puede concluir sobre los tres triángulos de acuerdo con los resultados anteriores?



Ítem 7.4)

El 100% de los grupos contestaron correctamente, todos ellos relacionaron los lados de los triángulos por medio de una razón y simplificaron sus términos. En la siguiente figura se observa el proceso que realizó uno de los grupos para formar las razones éntrelas medidas de los lados de los triángulos, primero escribe las longitudes de los segmentos, luego los relaciona y simplifica.



TRIANGULO	Lado recta s	Lado recta t	Razón
ΔAOM	$\overline{AO} = 4$	$\overline{MO} = 2$	$\frac{\overline{AO}}{\overline{MO}} = \frac{4}{2} = 2$
ΔBON	$\overline{BO} = 12$	$\overline{NO} = 6$	$\frac{\overline{BO}}{\overline{NO}} = \frac{12}{6} = 2$
ΔCOP	$\overline{CO} = 6$	$\overline{PO} = 3$	$\frac{\overline{CO}}{\overline{PO}} = \frac{6}{3} = 2$

Gráfico 108. Respuesta a la situación 6, ítem 7.4

Ítem 7,6)

El 50% de los grupos contestan bien, el otro 50% solo plantearon una proporción o como aparece en la siguiente imagen, se plantean bien las proporciones pero solo con un dato de la tabla, los integrantes del grupo encuentras razones equivalentes para igualar con la primera que tienen. En este ejercicio se comprueba que los estudiantes comprenden el concepto de proporción entre segmentos y hacen conjeturas con otros valores.

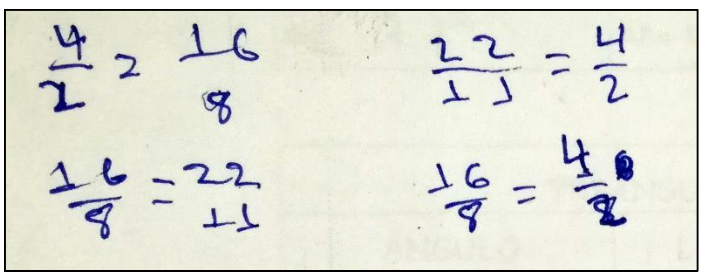


Gráfico 109. Respuesta a la situación 6, ítem 7.6

Ítem 7.7)

El 33,33% de los grupos concluyeron de forma adecuada, el 16,67% le faltó más generalidad en la respuesta y el 50% no contestaron adecuadamente. En la siguiente imagen se observa la respuesta de uno de los grupos, los estudiantes menciona rectas directamente proporcionales y grupos de parejas, de esta forma ellos se refieren a segmentos o lados proporcionales en los triángulos semejantes y los grupos de parejas se relacionan con las razones entre sus medidas.

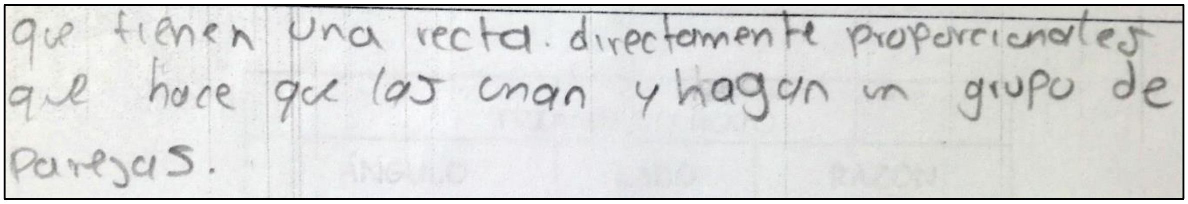

que tienen una recta. directamente proporcionales que hace que las unan y hagan un grupo de parejas.

Gráfico 110. Respuesta a la situación 6, ítem 7.7

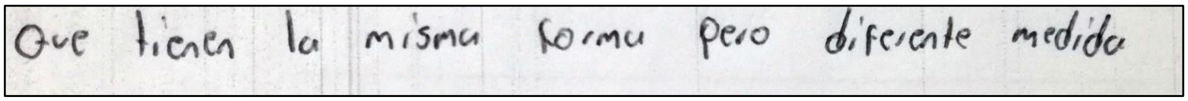

Que tienen la misma forma pero diferente medida

Gráfico 111. Respuesta a la situación 6, ítem 7.7

En esta imagen un grupo concluye adecuadamente la relación entre los triángulos, los estudiantes llegan a la conclusión que los triángulos tienen la misma forma pero distinto tamaña, esto hace referencia a la definición de semejanza.

ANEXO 18

Tabla 42.

Comportamientos esperados y observados Secuencia didáctica sobre Razones

ÍTEM	COMENTARIOS
1.1	Se esperaba que los estudiantes interpretaran el denominador de la fracción; 12 de los 22 jóvenes lo hicieron correctamente, 8 tuvieron idea, uno no interpretó bien y otro estudiante dejó en blanco. Para los estudiantes este punto fue sencillo, el alumno que no contesto fue porque no diferenció en ese momento el numerador del denominador.
1.2	Tal como se esperaba, los estudiantes reconocieron el numerador de la fracción; 16 jóvenes lo hicieron de forma correcta, 4 estuvieron cerca en el concepto, uno se equivocó y otro dejó en blanco. El estudiante que dejo en blanco no diferenciaba el numerador del denominador y el estudiante que contesto mal fue porque confundió el numerador con el denominador.
1.3	Como se había previsto, los estudiantes representaron gráficamente la fracción e indicaran como se obtuvo; 8 estudiantes graficaron y explicaron correctamente, 9 solo graficaron y los 5 intentaron graficar pero dejaron las partes en que dividieron la unidad de diferente tamaño. Para los jóvenes esta punto era muy sencillo, los que se equivocaron fue por trabajar a las carreras.
1.4	Se esperaba que los estudiantes recordaran que son fracciones equivalentes; 6 jóvenes encontraron la relación de las dos fracciones dadas y escribieron otra fracción equivalente, 16 fallaron en ese punto, ellos escribieron o dibujaron fracciones que no estaban relacionadas con las anteriores. Algunas explicaciones para esto fue la deficiencia en comprensión lectora de los estudiantes, contestar rápido para terminar la actividad o inseguridad en lo que saben. Al trabajar de forma grupal se puede destacar la importancia de la fase de formulación y validación ya que la solución correcta en el grupo es producto de la discusión de todos sus integrantes. En esta fase 4 grupos contestaron correctamente,

	3 grupos continuaron con el error, esto da indicios que aún los estudiantes no tienen claro este concepto de fracciones equivalentes. Se percibe un problema de comunicación en el lenguaje usado y en la redacción de algunas preguntas.
2.1	Se esperaba que los estudiantes multiplicaran el valor del computador por la fracción; 10 estudiantes realizaron el proceso esperado, uno solo multiplico pero le faltó dividir, 7 contestaron mal y 4 dejaron en blanco. Los jóvenes que no contestaron bien, fue porque algunos no sabían cómo relacionar el precio del computador con la fracción y otros porque multiplicaron o dividieron mal. Los que dejaron en blanco no sabían que proceso seguir, esto indica que todavía tienen dudas con el concepto de fracción como operador.
2.2	Se esperaba que los estudiantes escribieran las dos interpretaciones de las fracciones. Solo un estudiante lo hizo bien, 10 estuvieron cerca en sus respuestas, 9 contestaron mal y uno dejo en blanco; este ejercicio es sencillo y sorprendió que tantos jóvenes fallaran, esto evidencia la falta de comprensión lectora de los estudiantes.
2.3	Como se esperaba, los estudiantes tuvieron dificultades para establecer la relación entre las fracciones. Solo 2 estudiantes contestaron bien, 6 se acercaron a la respuesta, 13 respondieron mal y 1 dejo en blanco. A los jóvenes se les dificultó establecer la relaciones entre las dos fracciones, esto evidencia de nuevo la falta de comprensión lectora de los estudiantes
3.1	Se esperaba que los estudiantes utilizaran la fracción como operador; 3 grupos respondieron adecuadamente al multiplicar por la fracción y hallar el número de mujeres; un grupo solo multiplica por la fracción, pero no halla lo pedido; 3 grupos se equivocan en el proceso, dos de ellos realizan mal la multiplicación o división, el otro grupo solo calcula una fracción equivalente
3.2	Se esperaba que los estudiantes indicaran la relación entre las dos fracciones; 4 grupos responden bien al indicar que una de las fracciones se multiplica por 3 para dar la otra; 2 grupos no precisan bien la respuesta y un grupo se equivoca al

	multiplicar las dos fracciones, esto evidencia la falta de comprensión lectora de los jóvenes.
3.3	Como se había previsto, los estudiantes presentaron dificultad para establecer el significado del numerador y el denominador; 4 grupos se acercan a la respuesta correcta pero les falta precisar bien el numerador o el denominador, 2 grupos se equivocaron al no indicar lo que significan los dos términos. De nuevo se evidencia la falta de comprensión lectora de los estudiantes. Este ejercicio es una primera aproximación al concepto de razón, donde se están relacionando por medio de una fracción el número de hombres con el total de estudiantes.
3.4	Se esperaba que los estudiantes interpretaran el numerador y el denominador de la fracción; 4 grupos se equivocan en la respuesta, dos grupos de ellos multiplicaron por 3 el numerador y el denominador para llegar a una fracción equivalente, lo cual no corresponde con lo pedido. Esto evidencia la falta de comprensión lectora.
3.5	Se esperaba que los estudiantes escribieran la razón $\frac{9}{24}$; 3 grupos tuvieron dificultad para dar una respuesta adecuada, uno de los motivos es la falta de comprensión en la pregunta y no releer los ítems anteriores. Después de la devolución, 3 grupos entendieron la interpretación de la fracción como una razón, ellos relacionaron adecuadamente el número de mujeres con el total de estudiantes.
3.6	Tal como se esperaba, los estudiantes presentaron dificultad para interpretar las fracciones de los tres ítems. A 2 grupos les queda faltando una de las tres interpretaciones de las fracciones, 4 grupos solo interpretan una de las fracciones y un grupo deja en blanco. Los estudiantes evidencian en poco esfuerzo en resolver los ejercicios y la falta de comprensión lectora.
4.1	Se esperaba que los estudiantes contestaran el ítem a); 11 estudiantes responden de forma correcta, 3 estudiantes dejan en blanco y 8 responden otros ítems. El punto es sencillo, los estudiantes fallaron por falta de comprensión lectora y responder

	rápido.
4.2a	Como se había previsto, los estudiantes escribieron la fracción $\frac{4}{10}$; 11 estudiantes relacionaron bien el número de preguntas incorrectas con el número de preguntas correctas; 6 jóvenes fallaron al escribir mal los términos de la razón o no relacionarlos por medio de un cociente; 2 estudiantes mencionaron los términos correctos pero no los escribieron como una razón y 3 dejaron en blanco este punto En los estudiantes que contestaron bien se evidencia que comprenden el concepto de razón, los otros estudiantes les falto leer mejor el enunciado y estar más proactivos en la secuencia.
4.2b	Se esperaba que los estudiantes escribieran la razón $\frac{4}{6}$; 8 estudiantes hallaron la razón requerida; 10 jóvenes escribieron razones pero no relacionaban los datos pedidos y 4 dejaron en blanco. Después de debatir las respuestas en la etapa de validación, los jóvenes aceptan que los temas eran muy sencillos y que les falto leer mejor cada pregunta. Al trabajar en forma grupal y validar las repuestas de los integrantes del grupo, 3 grupos contestan bien y 4 de forma incorrecta, esto nos da indicios que algunos estudiantes les cuesta entender lo que les preguntan y también que no tienen claro el concepto de razón.
4.2c	Se esperaba que los estudiantes tuvieran dificultades para encontrar el significado a la razón $\frac{12}{20}$; 2 estudiantes interpretaron correctamente las los términos de las razones; 5 estudiantes interpretaron solo una razón o escribieron el factor por el que se multiplico la fracción original; 6 dejaron en blanco y 9 se equivocaron al interpretar mal los términos de la razón. Posteriormente en la fase de formulación, 2 grupos responde bien, 2 dejaron la respuesta incompleta, 2 grupos dejaron en blanco porque no comprendían y un grupo contesto mal. De nuevo se evidencia la falta de comprensión lectora de los estudiantes y el facilismo de algunos.

4.3a	Se esperaba que los estudiantes escribieran la razón $\frac{30}{6}$; 2 estudiantes escriben bien la razón; 3 escriben las cantidades pero no las relacionan con una razón; 6 dejan en blanco y 11 contestan mal al escribir otros valores en la razón. En esta actividad se evidencia que algunos estudiantes comprenden el concepto de razón, a pesar de que no hayan escrito bien los términos pedidos.
4.3b	Se esperaba que los estudiantes escribieran la razón $\frac{30}{36}$; 8 jóvenes escriben de forma correcta la razón, un estudiantes solo haya sus términos; 8 dejan sin contestar y 5 responden mal al no relacionar por medio de una razón los datos pedidos en el enunciado.
4.3c	Se esperaba que los estudiantes presentaran dificultad para interpretar los términos de las razone; 5 estudiantes interpretaron bien la primera razón $\frac{1}{6}$ y explican cómo se obtienen la razón $\frac{7}{42}$; 4 estudiantes solo dicen como da la da la segunda razón a partir de la primera; 5 jóvenes interpretan mal los términos de la razón y 8 lo dejan en blanco. El ejercicio es sencillo y con una buena comprensión los estudiantes lo habrían resuelto.
5.1	Se esperaba que los estudiantes le dieran un significado al concepto de razón; 6 estudiantes dieron un significado correcto al concepto de razón; 3 tienen la idea; 8 responden mal y 5 dejan en blanco. Esto evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para escribir y definir conceptos con sus propias palabras, a pesar que comprendan el concepto.
5.2	Se esperaba que los estudiantes dedujeran la relación entre los términos de una razón; 2 estudiantes se aproximan a la relación entre los términos; 12 estudiantes escriben algunas razones pero no explican la relación y 8 dejan en blanco. Esto

	evidencia la falta de comprensión lectora de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia

Comentario general de la Secuencia sobre Razones

Se observó que el trabajo en grupo en las fases de formulación y validación ayudó a los estudiantes a aclarar las dudas que tenían. Después de esto, los jóvenes comprendieron mejor las interpretaciones de las fracciones como parte-todo, operador y como razón.

Entre las deficiencias que se encontraron esta la falta de compresión lectora de los estudiantes y la dificultad para escribir con sus propias palabras conceptos o procesos.

En esta secuencia se trabajaron las variables microdidácticas VMF-1, VMF-2 y VMR, la última variable se utilizará en las siguientes secuencias.

Tabla 43.
Comportamientos esperados y observados Secuencia didáctica sobre Proporciones

ÍTEM	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Se esperaba que los estudiantes escribieran la proporción $\frac{8}{10}=\frac{12}{x}$; 11 estudiantes contestaron de forma correcta; 5 estudiantes escribieron las razones pero no las igualaron y 6 estudiantes igualaron dos razones que no formaban una proporción. Al trabajar en grupo en la fase de formulación validación, 5 de los 7 grupos hallaron la proporción, un grupo dejo solo las razones y otro grupo escribió una proporción incorrecta. Este trabajo evidencia que la mayoría de los estudiantes comprenden los conceptos de razón y proporción.
1.2	Se esperaba que los alumnos identificaran el término desconocido; 7 estudiantes interpretaron el termino faltante; 8 jóvenes les falto concretar la respuesta y 7 estuvieron alejados de lo correcto. Este ejercicio es sencillo y se evidencia la falta de comprensión lectora de los estudiantes.
1.3	Tal como se esperaba, los estudiantes calcularon el valor desconocido en la proporción; 14 estudiantes hallaron el valor faltante, algunos utilizaron una regla de

	tres y otros la propiedad fundamental de las proporciones; 8 estudiantes se equivocaron en el proceso al multiplicar y dividir por los datos incorrectos. Se evidencia que los presaberes de los estudiantes en el concepto de proporciones son adecuados y los saben utilizar en estos ejercicios.
2.1	Se esperaba que los estudiantes escribieran la proporción y solucionaran el ejercicio; 15 estudiantes formaron la proporción y encontraron la solución pedida, la gran mayoría verificaron la respuesta por medio de la propiedad fundamental de las proporciones; 2 estudiantes dejaron solo la proporción y 5 jóvenes se equivocaron al formar las proporciones. En este ejercicio se evidencia la buena comprensión que tienen la mayoría de los estudiantes sobre el concepto de proporción.
2.2	Se esperaba que los estudiantes escribieran la proporción y hallaran la solución; 18 jóvenes responden acertadamente y verifican la solución por medio de la propiedad fundamental de las proporciones; 1 deja solo la proporción planteada; 1 deja en blanco y 2 se equivocan con la proporción y la solución. De nuevo los estudiantes comprenden por medio de este ejercicio el objeto matemático de proporciones.
2.3	Como se había previsto, los estudiantes escribieron la proporción y hallaron la solución; 16 estudiantes realizan todo el proceso; 3 inicial bien con la proporción pero no lo terminan; 1 deja en blanco y 2 se equivocan al formar la proporción. Los presaberes de los estudiantes fueron esenciales para que desarrollaran estos ejercicios y la mayoría de ellos comprendieron el concepto de proporción
3.1 – 3.2	Se esperaba que los estudiantes calcularan el valor desconocido en la proporción. En ambos ítems fueron 15 estudiantes que calcularon correctamente el valor de la x y la gran mayoría comprobó el resultado por medio de la propiedad fundamental de las proporciones.
3.3	Se esperaba que los estudiantes escribieran un significado para el concepto de proporción; 6 estudiantes definieron correctamente el termino; 6 tenían idea pero

	les falto precisar; 2 dejaron en blanco y 8 les costó dificulta definir el concepto de proporción. Se evidencia de nuevo la dificultad que tienen los estudiantes para escribir lo que entiende de algo, muchos de ellos entienden el concepto pero les cuesta escribirlo.
4.1	Se esperaba que los estudiantes reconocieran la relación de las dos magnitudes; 17 estudiantes comprenden y escriben la relación, 1 deja en blanco y 4 no fallan en la respuesta. Los estudiantes que fallaron fue por falta de comprensión en la lectura.
4.2	Se esperaba que los estudiantes escribieran una razón con los datos de la tabla; 11 estudiantes escriben bien la razón y la explican; 5 solo la escriben; 1 deja el espacio en blanco y 5 estudiantes comenten algunos errores como escribir la razón, pero interpretarla mal y escribir dos razones e igualarlas. En general el concepto de razón se aclara más en ellos.
4.3	Tal como se esperaba, los estudiantes escribieron una proporción con los datos de la tabla; 13 estudiantes escriben bien la proporción; 4 estudiantes escriben las razones pero no las relacionan bien por medio de una proporción; 2 dejan en blanco y 3 escriben mal la proporción. Se evidencia que los jóvenes comprenden el concepto de proporción y lo utilizan para solucionar ejercicios.
4.5	Se espera que los estudiantes identificaran la proporción y hallaran la solución; 6 estudiantes responden de forma adecuada, la mayoría soluciona este ítem por medio de una regla de otros, otros utilizan la propiedad fundamental de las proporciones; 3 estudiantes se acercaron al resultado pero les fató ser más precisos; 1 dejó en blanco y 12 se equivocaron al formar la proporción o utilizar mal la regla de tres. Las dudas que tuvieron los estudiantes fueron aclaradas en las fases de formulación y validación, donde 3 grupos respondieron bien; 2 se acercaron a la respuesta y otros 2 grupos fallaron en el proceso. Las fases de formulación y validación son muy importantes para aclarar, precisar y entender mejor un concepto matemático.

4.7	Se esperaba que los estudiantes determinaran la constante de proporcionalidad y tuvieran dificultad para explicar su utilidad; 6 estudiantes hallar y explican correctamente la constante de proporcionalidad; 7 solo hallan la constante pero no la explican; 2 dejan en blanco y 7 se equivocan, la mayoría porque dividen el termino menor entre el mayor y dejan como constante cero. Se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para escribir lo que entienden.
5.1	Se esperaba que los estudiantes determinaran la constante de proporcionalidad; 9 estudiantes contestan lo pedido; 2 dejan expresadas las razones; 2 dejan en blanco y 9 se equivocan, entre los os errores cometidos están: dividir el término mayor entre el menor y dejar como constante cero o indicar como están creciendo las magnitudes.
5.3	Se esperaba que los estudiantes realizaran la gráfica que representa los datos de la tabla; 14 jóvenes realizan de forma adecuada la gráfica; a 4 les queda incompleta; 1 deja en blanco y 3 se equivocan al escribir mal los valores en los ejes.
6	Se esperaba que grupos establezcan las proporciones y completen los datos de la tabla. Los grupos llenan bien la tabla, unos establecen las proporciones, otros analizaron el comportamiento de los datos para colocar los faltantes. En este ejercicio se evidencia la importancia de la fase de formulación y validación ya que la respuesta correcta en el grupo es producto de la intervención de todos sus integrantes.
6.2	Se esperaba que los grupos realizaran la gráfica que representa los datos de la tabla; 5 grupos realizan bien la gráfica y 2 grupos les falta mejorar su representación, en especial cuando escriben los valores en los ejes, no toman la escala adecuada.
6.3	Se esperaba que los grupos interpretaran los términos de la razón. En general 5 grupos los reconocen e interpretan, pero a 2 grupos les falto explicar uno de ellos. En esta actividad se evidencia que los estudiantes comprenden el concepto de razón.

7.2	Se esperaba que los estudiantes escribieran una razón y la explicaran; 10 estudiantes la escriben y la explican; 3 solo indican la razón; 2 dejan en blanco y 7 jóvenes intentan explicar la razón pero sin escribirla. Se evidencia en este ejercicio la falta de comprensión lectora de los estudiantes.
7.3	Como se había previsto, los estudiantes tuvieron dificultan para escribir una proporción con los datos de la tabla. Solo un estudiante contesto bien; 3 escribieron las razones pero no las igualaron y 15 estudiantes formaron mal las proporciones, no se percataron que las magnitudes son inversas y no comprobaron la propiedad fundamental de las proporciones.
7.5	Se esperaba que los estudiantes identificaran la proporción y hallaran su solución; 8 estudiantes contestaron bien utilizando una regla de tres; 4 dejaron en blanco porque desconocían el proceso a seguir y 9 se equivocaron al utilizar la regla de tres para magnitudes directas. Se evidencia en este punto la falta de atención de los estudiantes en el comportamiento de las magnitudes. Comportamiento similar se aprecia en el ítem 7.6.
7.7	Como se había previsto, los alumnos tuvieron dificultad para calcular la constante de proporcionalidad e indicar su aplicación. Un estudiante calcula la constante e indica su utilidad; 8 solo calculan la constante; 4 hallan mal la constante al dividir los datos y 9 dejan en blanco porque no saben cómo explicarla. Se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para expresar con sus propias palabras algún concepto.
8.1	Se esperaba que los estudiantes determinaran la constante de proporcionalidad; 6 determinan la constante; 2 dejan expresado el producto; 5 calculan mal la constante al dividir los datos y 9 dejan en blanco porque dudan del proceso a realizar. Se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes con las magnitudes inversas.
8.2	Se esperaba que los estudiantes determinaran si las magnitudes inversamente proporcionales; 5 estudiantes realizan todo los productos de los datos y contestan

	bien; 4 realizan algunos productos y no concretan la respuesta; 3 realizan divisiones y se equivocan en la respuesta y 10 dejan en blanco.
8.3	Se esperaba que los alumnos presentaran dificultad para realizar la gráfica. Un estudiante grafica bien los datos; 4 realizan la gráfica pero tienen problemas al escribir los datos en los ejes; 10 realizan mal la gráfica, se equivocan al escribir los valores en los ejes y 7 dejan en blanco. Se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para establecer una escala adecuada para representar los datos.
9	Se esperaba que los grupos completaran la tabla. Un grupo completo bien la tabla; otro parcialmente; 3 dejaron en blanco y 3 grupos se equivocaron al completar la tabla sumando el mismo valor en cada posición.
9.1	Se esperaba que los grupos calcularan la constante de proporcionalidad. Un grupo realiza el cálculo bien; otro grupo deja expresados los productos y 5 se equivocan al dividir los datos de la tabla.
9.2	Se espera que los grupos representaran los datos de la tabla por medio de la gráfica. Un grupo realiza bien la gráfica; otro parcialmente; otro deja en blanco y 4 grafican mal al escribir de forma errónea los valores de la tabla en los ejes y no tener en cuenta que la gráfica debe dar una curva decreciente.
9.3	Se esperaba que los grupos interpretaran la razón; 5 grupos interpretan bien los términos de la razón, un grupo deja en blanco y otro grupo se equivoca al mencionar solo el nombre de las magnitudes.

Fuente: Elaboración propia

Comentario general de la Secuencia sobre Proporciones

Se observó en el transcurso de las actividades que los jóvenes adquieren una mejor destreza para solucionar proporciones cuando falta un dato, distinguen más fácil las magnitudes directa de las inversamente proporcionales y mejoran la presentación de las gráficas.

En esta secuencia se trabajaron las variables microdidácticas VMR, VMP-1, VMP-2, VMP-3d, VMP-3i, VMP-4d y VMP-4i, las variables VMR y VMP-2 se utilizaran en las siguientes secuencias.

Tabla 44.
Comportamientos esperados y observados Secuencia didáctica sobre Proporcionalidad

ÍTEM	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Se esperaba que los estudiantes describieran la relación entre las magnitudes; 18 lo hacen de forma correcta y estudiante solo explica cómo se comporta una magnitud.
1.4	Se espera que los estudiantes escribieran una proporción con los datos de la tabla; 7 jóvenes la escriben correctamente, 6 dejan solo las razones sin igualarlas, 5 colocaron mal la proporción y un estudiante no contestó. El error cometido por los estudiantes se debe a la falta de comprensión en la lectura, porque en el momento de la fase de formulación y validación ellos se percatan del error y corrigieron la respuesta.
1.5	Tal como se esperaba, los estudiantes identificaron la proporción y hallaron el dato pedido; 16 hallaron la solución utilizando una regla de tres directa; un estudiante planteo bien la regla de tres pero se equivocó en la operación y 2 estudiantes se confundieron y aplicaron una regla de tres inversa. En este ejercicio se evidencia que la mayoría de los estudiantes aplican correctamente la regla de tres directa en la solución de problemas.
1.6 – 1.7	Se esperaba que los estudiantes utilizaran una regla de tres directa para encontrar el valor pedido. En ambos ítems, 14 estudiantes hallaron la solución al problema; los otros estudiantes presentaron dificultad en la operación o aplicaron una regla de tres inversa, pero cuando trabajan en grupo en la fase de formulación y validación se percatan del error y plantean bien la solución.
1.8	Se esperaba que los estudiantes resolvieran la proporción y explicaran el procedimiento general para solucionar problemas de regla de tres simple directa; 9 estudiantes hallan la solución y describen correctamente el procedimiento que

	utilizaron; 5 encuentran la solución pero se quedaron cortos al momento de explicar el proceso y 2 jóvenes se equivocaron al utilizar una regla de tres inversa.
2.1	Como se esperaba, 15 estudiantes explicaron la relación entre las dos magnitudes, los otros estudiantes dejan el ítem en blanco porque no sabían cómo explicarlo, pero cuando se trabaja en grupo en la fase de formulación y validación estas dudas se aclaran.
2.4	Tal como se había previsto, los estudiantes tuvieron dificultad al escribir la proporción cuando las magnitudes son inversas; solo 2 estudiantes lo hicieron bien; 10 dejaron escritas las razones pero no las igualaron porque no les daba igual el producto de los extremos. Se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para escribir las proporciones cuando las magnitudes son de este tipo.
2.5	Se esperaba que los estudiantes hallaran el dato desconocido; 11 de ellos solucionaron el ejercicio por medio de una regla de tres inversa; 7 fallaron al utilizar regla de tres directa o en las operaciones aritméticas, luego cuando los estudiantes trabajan en grupo en la fase de formulación y validación descubren el error y aclaran las dudas. Se evidencia que la mayoría de los jóvenes reconocen cuando las magnitudes son inversas y saben el proceso para solucionar este tipo de problemas.
2.6 – 2.7	En estos dos ítems la mayoría de los estudiantes reconocieron el tipo de variables y utilizaron la regla de tres inversa para solucionar los problemas. Para los jóvenes este proceso es sencillo y algunos lo aplican de forma mecánica.
2.8	Se esperaba que los estudiantes resolvieran la proporción y dedujeran el procedimiento general para solucionar problemas de regla de tres simple inversa; 5 estudiantes lo hacen satisfactoriamente; 4 dejan en blanco porque no saben cómo explicar este punto; 4 resuelven solo la proporción y 6 jóvenes se equivocan resolviendo la proporción. En los ejercicios de regla de tres inversa, cuando los jóvenes pueden organizar los valores les queda más fácil resolverlos, pero cuando se les da una proporción, algunos tienen dudas de cómo solucionarla cuando la

	magnitudes son inversas.
3	Tal como se esperaba, más del 50% de los estudiantes identificaron satisfactoriamente si las magnitudes relacionadas eran directa o inversamente proporcionales. Para los estudiantes estos ítems eran sencillos y no tuvieron mayor dificultad.
4.1 – 4.2	Se esperaba que los grupos completaran la tabla; 5 de ellos relacionan bien los valores de las magnitudes y hallaron los términos desconocidos. El procedimiento utilizado para encontrar cada valor fue una regla de tres directa. Los alumnos que tenían dudas en el proceso las resolvieron y opinaron que el ejercicio era sencillo pero largo.
5	Se esperaba que los grupos completaran la tabla; 3 de ellos lo hicieron de forma correcta, un grupo dejo en blanco, otro grupo se equivocó al utilizar regla de tres directa y 2 grupos utilizaron bien la regla de tres inversa pero no terminaron de llenar todos los valores.

Fuente: Elaboración propia

Comentario general de la Secuencia sobre Proporcionalidad

La mayoría de los estudiantes solucionan problemas de regla de tres directa sin inconveniente, pero cuando las magnitudes son inversas, los jóvenes tienen dificultad para identificar y solucionar este tipo de variables. El trabajo en grupo en las fases de formulación y validación fue un apoyo importante para aclarar estas dudas en los estudiantes.

En esta secuencia se trabajaron las variables microdidácticas VMR, VMP-2, VMT-id y VMT-1i, la variable VMT-1d se utilizará en la siguiente secuencia.

Tabla 45.

Comportamientos esperados y observados Secuencia didáctica sobre Porcentajes

ÍTEM	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS

1	Se esperaba que los estudiantes completaran la tabla. Todos los jóvenes demostraron que saben pasar un porcentaje a su expresión decimal y expresarlo como razón. Esto evidencia que los jóvenes posen presaberes adecuados sobre el concepto de porcentaje.
2.1	Tal como se esperaba, 12 estudiantes calcularon bien el porcentaje por medio de una regla de tres, 7 se equivocaron al no relacionar el total de mangos con el 100% o realizar mal las operaciones aritméticas.
2.2	Como se había previsto, los alumnos tuvieron dificultades para encontrar el porcentaje; 7 estudiantes lo hicieron de forma correcta, pero 11 se equivocaron al no relacionar los 90 alumnos con el 100%
2.3	Se esperaba que los estudiantes calcularan el porcentaje pedido; solo 8 estudiantes lo hicieron bien; uno dejó en blanco; 3 se equivocaron al no relacionar los 120 racimos con el 100% y 7 relacionaron bien los datos pero no precisaron la respuesta.
2.4	Se esperaba que los estudiantes escribieran un procedimiento general para solucionar estos ejercicios. 2 estudiantes lo hacen de forma correcta; 11 estudiantes tienen idea pero les falta ser más precisos; 3 solo realizan un ejemplo y 3 dejan en blanco. En esto tipo de enunciados, se evidencia la dificultad que tiene los estudiantes para escribir con sus propias palabras lo que ellos entienden de algún concepto o procedimiento.
3.1 – 3.2	Tal como se esperaba, más del 50% de los estudiantes calcularon los porcentajes pedidos; los alumnos que no lo hicieron bien relacionaron mal los datos o se equivocaron en las operaciones aritméticas, pero cuando trabajaron en grupo en la fase de formulación y validación, la mayoría de los integrantes de los grupos resolvieron las dudas y contestaron bien.
3.3	Se esperaba que los estudiantes escribieran el procedimiento general para calcular

	los porcentajes; 3 estudiantes explican adecuadamente el proceso; 9 intentan explicarlo pero les falta ser más concretos; uno deja en blanco y 6 realizan un ejemplo. De nuevo se evidencia la dificultad que tienen los estudiantes para plasmar con sus propias palabras lo que entienden del procedimiento.
3.4	Como se esperaba, 10 estudiantes calcularon el porcentaje y se lo sumaron a la cantidad inicial; 2 solo calculan el porcentaje; 2 dejan en blanco y 5 se equivocan al realizar mal las operaciones aritméticas. En general, la mayoría de los jóvenes saben calcular porcentajes.
3.5	Tal como se esperaba, 9 estudiantes calcularon el porcentaje y se lo restaron al valor inicial; un estudiante calculó solo el porcentaje; 4 dejaron en blanco y 5 tuvieron problemas con las operaciones. Cuando se trabajó en grupo en la fase de formulación y validación los estudiantes que habían dejado en blanco comprendieron el proceso y notaron lo sencillo del ejercicio.
4.1 – 4.2	En ambos ítems, el procedimiento utilizado por 5 grupos fue correcto, los estudiantes calcularon el porcentaje y este valor se lo restaron al valor inicial; solo un grupo calculó bien el porcentaje pero realizó mal la resta. Se evidencia que el trabajo en grupo en las fases de formulación y validación son fundamentales para el proceso de aprendizaje de los estudiantes.
4.3 – 4.4	En ambos ítems más del 50% de los grupos calcularon el valor pedido; 4 de ellos contestaron bien al hallar el porcentaje y sumarlo al valor inicial; un grupo solo calculo el porcentaje y otro grupo en vez de sumar resto.
5.1	Se esperaba que los grupos completaran la tabla; 3 grupos calculan los porcentajes de cada mes y completan de forma adecuada la tabla; los otros 3 grupos realizan bien los cálculos pero no completan todos los valores. Se evidencia que los estudiantes comprenden el concepto de porcentaje y lo saben aplicar para solucionar problemas.

Fuente: Elaboración propia

Comentario general de la Secuencia sobre Porcentajes

Los jóvenes presentaron al principio dificultades para hallar el porcentaje de una cantidad dependiendo del total, pero con el trabajo en grupo y la interacción con los compañeros las dudas se fueron aclarando.

Los estudiantes no tuvieron problema para calcular el porcentaje de una cantidad y sumarlo o restarlo al valor inicial.

En esta secuencia se trabajaron las variables VMT-1d, VMC-1, VMC-2 y VMC-3, la variable VMT-1d se utilizará en la siguiente secuencia.

Tabla 46.
Comportamientos esperados y observados Secuencia didáctica sobre Proporcionalidad Geométrica

ÍTEM	COMPORTAMIENTOS ESPERADOS
1.1	Se esperaba que los estudiantes calculen la razón pedida; 16 de ellos calculan correctamente la razón entre las medidas de los segmentos; 2 dejaron en blanco. Se evidencia que los estudiantes comprenden el concepto de razón y ahora lo aplican para los segmentos.
1.2	Tal como se esperaba, todos los estudiantes dibujaron y calcularon la razón entre las medidas de los segmentos, solo un alumno no simplificó.
1.3	Se esperaba que los estudiantes escribieran la proporción; 11 de ellos escriben de forma correcta la proporción; uno deja indicada las razones; otro se equivoca al no formar una proporción y 7 dejan en blanco. La mayoría de los estudiantes comprende el concepto de proporción y lo aplican con las medidas de los segmentos.
2	Se esperaba que los estudiantes encontraran el valor del segmento; 15 de ellos formaron la proporción y hallaron el valor del segmento; un estudiante solo escribió la proporción; 2 la escribieron mal y 2 dejaron en blanco

3.1 – 3.2	Tal como se esperaba, 19 estudiantes miden las longitudes de los rectángulos y 18 hallan las razones entre el largo y el ancho. Este ítem les agrado a los jóvenes porque se trabajó con material manipulable.
3.4	Como se esperaba, 17 estudiantes encontraron las parejas de rectángulos semejantes, primero a simple vista; luego de forma analítica, analizando los resultados de las razones de las medidas de los lados y emparejando aquellas que fueran iguales para formar las proporciones. La actividad fue llamativa e innovadora para los estudiantes.
3.5	Se esperaba que los estudiantes encontraran un rectángulo semejante al dado; 14 jóvenes simplificaron las medidas del largo y el ancho para hallar el rectángulo y formar la proporción; 6 estudiantes dejaron en blanco porque no entendieron el enunciado. Se evidencia en este ítem la falta de comprensión lectora de los jóvenes. Se percibe un problema de comunicación en el lenguaje usado y en la redacción de algunas preguntas.
4	Como se esperaba, 16 estudiantes forman las razones con las medidas de los segmentos; 2 lo dejan incompleto, 2 se equivocan al tomar otros valores y uno deja en blanco. Cuando trabajan en grupo los estudiantes en la fase de formulación y validación, las dudas se aclaran y todos los grupos contestan bien.
4.1	Tal como se esperaba, 13 estudiantes escribieron que los segmentos son proporcionales porque tienen la misma razón; 5 estaban por buen camino pero les falto concretar mejor la respuesta; uno se equivocó y otro dejo en blanco. Se evidencia que la mayoría de los estudiantes comprenden el concepto de proporcionalidad entre segmentos.
4.4	Se esperaba que los estudiantes escribieran proporciones entre las medidas de los segmentos; 15 lo hacen de forma correcta; 2 dejan expresadas las razones pero no las igualan; uno escribe mal la proporción y 2 dejan en blanco. En la fase de formulación y validación todos los integrantes de los grupos dan la respuesta

	correcta.
5.1	Tal como se esperaba, todos los grupos escriben de forma correcta las proporciones y hallan el valor desconocido. Esto evidencia que los jóvenes comprenden el concepto de proporción entre segmentos.
5.2	Como se había previsto, los grupos tuvieron dificultad para hallar los datos de la tabla; 2 grupos utilizaron proporciones y llenaron de forma correcta los datos; 3 grupos calcularon solo el primer valor y uno dejó en blanco porque no sabían que proceso hacer.
6.1	Se esperaba que los estudiantes calcularan la altura del poste por medio de una proporción. Esta actividad se realizó en el patio, los estudiantes con metro tomaron las medidas que necesitaban; 12 contestaron de forma correcta por medio de una proporción o utilizando regla de tres; 3 dejaron planteada la proporción pero no la solucionaron, otros 3 jóvenes plantearon mal la proporción con los valores y 2 dejaron en blanco. En general, en la fase de formulación y validación todos los grupos contestaron bien y los estudiantes esclarecieron las dudas que tenían.
6.2 – 6.3	Como se esperaba, la mayoría de los estudiantes por medio de un dibujo relacionaron bien los datos para formar la proporción y hallar el valor pedido, pocos se equivocaron al escribir mal la proporción y operar los valores.
6.4	Como se había previsto, los estudiantes tuvieron dificultad para escribir en forma general el proceso que utilizaron para resolver los ejercicios; solo un estudiante lo hizó bien; 10 tuvieron buenas ideas pero les falto concretar; 8 dejaron en blanco. De nuevo se evidencia la dificultad que tienen los jóvenes para expresar con sus propias palabras lo que entienden de un concepto o proceso.
7.2	Se esperaba que los grupos escribieran que los ángulos tienen la misma medida; en general 5 de los grupos se acercan a la respuesta correcta y uno no encuentra ninguna relación.

7.4	Como se esperaba, todos los grupos completaron acertadamente la tabla. Se evidencia que los estudiantes comprenden el concepto de razón entre segmentos.
7.5	Tal como se esperaba, 3 de los grupos llegaron a la conclusión que las razones son iguales y los segmentos proporcionales; un grupo deja en blanco; un grupo no encuentra ninguna relación y otro grupo solo se refiere a la igualdad de las razones.
7.6	Se esperaba que los estudiantes escribieran las proporciones; 3 grupos escriben de forma correcta las proporciones y los otros tres grupos escriben las razones pero no igualan.
7.7	Dos de los grupos aciertan con la respuesta al aproximar una definición de semejanza; 3 grupos se equivocan y un grupo solo habla del tamaño de los triángulos y los ángulos iguales. Con este ejercicio se acercan los estudiantes al concepto de semejanza y con los ítems anteriores a la proporcionalidad de sus lados.
8	Tal como se esperaba, 10 estudiantes completan correctamente la tabla con las medidas de los triángulos; a 3 les faltó completar algunos datos y 7 dejaron en blanco.
8.1	Como se esperaba, los estudiantes que completaron la tabla concluyeron que los ángulos son iguales, los otros dejaron en blanco. Muchos se demoraron recortando y midiendo las figuras y al final no les quedo tiempo para contestar las ultimas preguntas.
8.2 - 8.3	Los estudiantes tuvieron dificultad para expresar con sus propias palabras una conclusión sobre el trabajo con los triángulos, sin embargo, 5 estudiantes contestaron de forma correcta al establecer la relación entre las razones de los lados y concluir que los lados son proporcionales; la mitad de estudiantes dejó este ítem en blanco, por falta de tiempo o poca comprensión lectura de las preguntas.

Fuente: Elaboración propia

Comentario general de la Secuencia sobre Proporcionalidad Geométrica

Esta secuencia fue más llamativa a los estudiantes porque se trabajó con material manipulable y se realizaron salidas para la toma de datos. Los estudiantes comprendieron el concepto de semejanza de rectángulos y triángulos por medio de su forma y los lados proporcionales; se introdujo el teorema de Thales, el cual resulto sencillo para los jóvenes quienes lo trabajaron con proporciones o regla de tres directa.

Se utilizaron las variables microdidácticas VMT-1d, VMG-RS, VMG-PS, VMG-SF y VMG-T.

ANEXO 19

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO

Los conceptos de razón y proporción

Sobre la noción de cantidad. Siguiendo la idea aristotélica de atributo, se puede decir que una atribución de cantidad es aquella que realizada sobre un fenómeno (objeto, evento, sucesión de eventos u objetos indexados de acuerdo a la ocurrencia de los mismos en función de condiciones espacio-temporales) permite organizar diferentes estados del mismo según que la atribución sea objeto de aumento o disminución, de comparación (por diferencia) o de igualación (al agregar o quitar). Si la atribución es de naturaleza continua, entonces refiere a una magnitud, la cual es susceptible de ser medida, pero si es de naturaleza discreta, refiere a una pluralidad y es susceptible de ser contada (Obando, 2014)**.**

En toda atribución de cantidad es posible definir una relación de equivalencia (cuando dos instancias de la atribución son idénticas), una relación de orden (cuando una instancia es mayor o menor que la otra) y una operación aditiva (que permite agregar o juntar dos instancias de la atribución de cantidad para producir una tercera). La relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia se puede definir como una *cantidad* en la atribución dada (por ejemplo, cuando la atribución de cantidad refiere a una *longitud*, las clases de equivalencia formadas se pueden llamar *cantidades de longitud*). Así entonces, el conjunto de cantidades con la relación de equivalencia y la operación aditiva forman un *semigrupo aditivo conmutativo* y se tiene entonces ha denominado un *sistema de cantidades* (Obando, 2014).

Sobre la noción de razón. La condición necesaria y suficiente para que dadas dos *cantidades* de un *sistema de cantidades*, sobre ellas se pueda establecer una razón, es que cumplan con la propiedad arquimediana: dadas dos *cantidades* $x, y \in A$, con A un *sistema de cantidades*, entonces entre ellas se puede establecer una razón si existen números naturales m, n tales que $n.x>y, \wedge\ m.y>x$ (en el contexto griego no necesariamente implicaban número naturales, sino magnitudes equimúltiplos). La idea general detrás de esta formulación es que sobre dos cantidades x e y, entre ellas se puede definir una razón si dichas cantidades son finitas. Dada la simetría de la propiedad arquimediana con respecto a las cantidades x e y, entonces sobre ellas siempre será posible definir dos razones: dados dos *sistemas de cantidad* A_1 y A_2 (no necesariamente distintos) y dos *cantidades* $x \in A_1$, $y \in A_2$, entre dichas cantidades se pueden definir dos razones, a saber, "la razón de x a y", y la "la razón de y a x" (en la notación clásica $x : y$ o $y : x$). Ser consciente de la existencia de este par de razones entre cantidades y de la distinción entre ellas es importante no solo porque la una es la recíproca de la otra, sino también porque en términos de las relaciones que cuantifican, una de ellas se puede usar como base para determinar unívocamente la otra: "si la razón de x a y es α " entonces "la razón de y a x es α^{-1}" (tal como se concebía en la aritmética griega) (Obando, 2014).

Sobre la proporción. Siguiendo la noción clásica, se entiende la proporción como la equivalencia entre dos razones, es decir, la proporción se comprende como una forma proposicional binaria o diádica que permite poner en relación dos razones, o como un predicado cuaternario o tetrádico entre cuatro cantidades: si las *cantidades* x , y , $x`$ , $y`$ son tales que $x= \beta.x`$ implica $y=\beta.y`$ (igual medida relativa de x a $x`$ que $y$ a $y`$), entonces $x : y :: x` : y`$. Esto implica que las nociones de medida relativa y equimultiplicidad son fundamentales en el proceso de comprensión tanto de la razón como de la proporción, y ambas permiten *objetivar* la razón a través de la clase de equivalencia de todas las parejas de cantidades que están en la misma razón (equivalencia significa designar la misma propiedad característica de las cantidades comparadas, y en particular, igual medida relativa) (Obando, 2014).

Razón y proporción en los Elementos

La importancia de los *Elementos* como fuente histórica en cualquier aspecto de la matemática, incluida la proporcionalidad, es indudable. Sin embargo, debe tenerse muy en cuenta que este texto nos muestra la teoría ya terminada sin pistas sobre el cómo ni mucho menos el porqué. Es decir, aunque los *Elementos* resultan de gran utilidad a la hora de conocer el conocimiento teórico que se poseía en la época respecto a los conceptos estudiados, no nos proporciona información alguna sobre los problemas concretos que dieron lugar a dicha teoría (Oller, 2013).

El primer inconveniente importante del texto es que el concepto “razón” no está definido de una forma clara y precisa. En el libro VII este término apenas aparece mientras que el libro V todo lo que se dice es que “*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”* (V, Def. 3) y que “*guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a la otra”* (V, Def. 4). Es decir, tan sólo se indica (Def. 3) que la razón entre dos magnitudes tiene algo que ver (no se especifica el qué) con su tamaño y que, utilizando lenguaje moderno, se exige la propiedad arquimedeana (Def. 4). Lo que parece quedar claro, a la luz de la primera de estas dos definiciones es que la razón no es, en modo alguno, un número. Este carácter no numérico de las razones en los *Elementos* está reforzado por el hecho de que apenas se da un tratamiento sistemático a las operaciones entre razones; además nunca se habla de igualdad de razones, sino de “*guardar la misma razón*” (V, Def. 5) o de “*guardar una razón mayor”* (V, Def.7) (Oller, 2013).

Un aspecto a tener en cuenta respecto del tratamiento de la proporcionalidad en los *Elementos* es que se desarrollan dos teorías aparentemente distintas. Una para números y otra para magnitudes. Ello hace que surja la necesidad de probar resultados similares dos veces. Esto es así por la forma en la que los griegos concebían las magnitudes. Para ellos no tenía sentido considerar el producto de dos magnitudes y así resuelto como “*si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero”* (VII, Prop. 19) y “*si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias”* (VI, Prop. 16) requieren de tratamientos radicalmente diferentes. Nótese, además, que ambos enunciados se basan en definiciones distintas de la proporcionalidad y mientras que el primer enunciado se presenta con toda generalidad, el segundo se circunscribe a un ámbito muy concreto (rectas y rectángulos) (Oller, 2013).

Proporcionalidad en los Nueve Capítulos.

Los textos antiguos orientales y los chinos en particular, por más que escondan una cierta búsqueda de métodos generales, poseen un eminente enfoque práctico. Se trata de colecciones de problemas acompañados de una solución numérica o de una mera descripción del método de resolución aplicado a los datos concretos del problema presentado. Esta presentación, choca radicalmente con el paradigma griego (que de hecho constituye la excepción en el mundo antiguo) se prolongará mucho en el tiempo y puede observarse aún su influencia en textos muy posteriores como el Liber Abaci (Oller, 2013).

Teniendo en cuenta el enfoque de la obra, es natural la aparición de aspectos relacionados con la proporcionalidad. El concepto central en el tratamiento que Liu Hui (matemático chino del siglo III) hace de la proporcionalidad es el de lü (término que se traduce como rate o proportional value). Liu Hui define lü como un "*conjunto de números correlacionados"* y enumera algunas propiedades y operaciones entre ellas. En concreto: "*las lü pueden convertirse unas en otras. Si hay fracciones en una lü, ésta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las lü se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador"* (Oller, 2013).

La interpretación de este concepto es sencilla. Se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales y una *lü* no es más que un conjunto de valores de dichas magnitudes. Las propiedades y operaciones descritas se siguen de la proporcionalidad directa entre las magnitudes consideradas. Kangshen et al., en este contexto, interpretan la razón entre dos magnitudes como su *lü* cuando una de ellas toma el valor 1. No obstante, no encontramos un análogo a la definición euclídea de razón ni a la razón por antifairesis, aunque el proceso de simplificación de fracciones descrito en los Nueve Capítulos es idéntico al algoritmo de Euclides. Este concepto de *lü*, decimos, es fundamental para Liu Hui y nos permite comprender el tipo de razonamiento subyacente a la génesis de la Regla de Tres (Oller, 2013).